SCPY158 Physics II : Part II - Modern Physics

วทฟส๑๕๘ ฟิสิกส์ ๒ : ส่วนที่ ๒ - ฟิสิกส์ยุคใหม่

Course Description (คำอธิบายรายวิชา)

ทฤษฎีสัมพัทธภาพ (Theory of Relativity) กลศาสตร์ควอนตัม (Quantum Mechanics) ฟิสิกส์อะตอม (Atomic Physics) ฟิสิกส์นิวเคลียร์ (Nuclear Physics)

เกณฑ์การประเมินผลการศึกษา

การบ้าน 10% และ การสอบปลายภาค 40%

หนังสืออ้างอิง

"ฟิสิกส์ ๒ (Physics II) - 9th Edition (2560)"

นฤมล เอมะรัตต์, เชิญโชค ศรขวัญ, รัชภาคย์ จิตต์อารี, และ ขวัญ อารยะธนิตกุล

ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล

หนังสือ "ฟิสิกส์ระดับมหาวิทยาลัย" เล่มอื่นๆ ทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษ

ทำไมต้องมี “Modern Physics”

เพราะว่า มี “ปรากฏการณ์” ที่ Classical Physics “ไม่” สามารถอธิบายได้ เช่น

(i) การ “คงตัว” ของ “อัตราเร็วของแสง” (ในสุญญากาศ)

(ii) การ “แผ่รังสี” ของ “วัตถุ (ดำ)” [(Black)body Radiation]

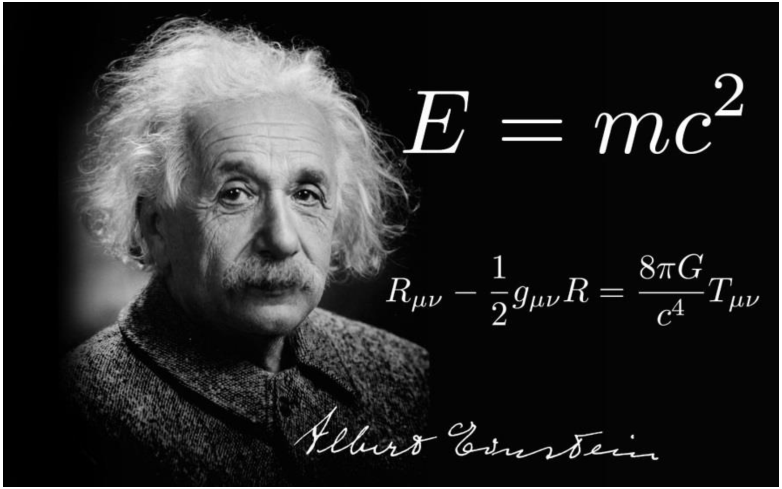
(iii) ปรากฏการณ์ “โฟโตอิเล็กตริก” (Photoelectric Effect)
[การหลุดออกจาก “ผิวโลหะ” ของ “อิเล็กตรอน” เมื่อฉาย “แสง” ที่มี “ความถี่พอเหมาะ”]

(iv) ปรากฏการณ์คอมพ์ตัน (Compton Effect)
[การเปลี่ยนของ “ความยาวคลื่น” ของ “คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า” ที่ “กระเจิง” ออกจาก “อิเล็กตรอน”]

(v) “สเปคตรัมแบบเส้น (line spectrum)” ของ “รังสี” ที่ “อะตอม” แผ่ออกมา

ซึ่งเป็น “ปรากฏการณ์” ที่ “เกี่ยวข้องกับ/เกิดขึ้นใน”
ระบบที่ “มีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงมากๆ” และ/หรือ “มีขนาดเล็กมากๆ”

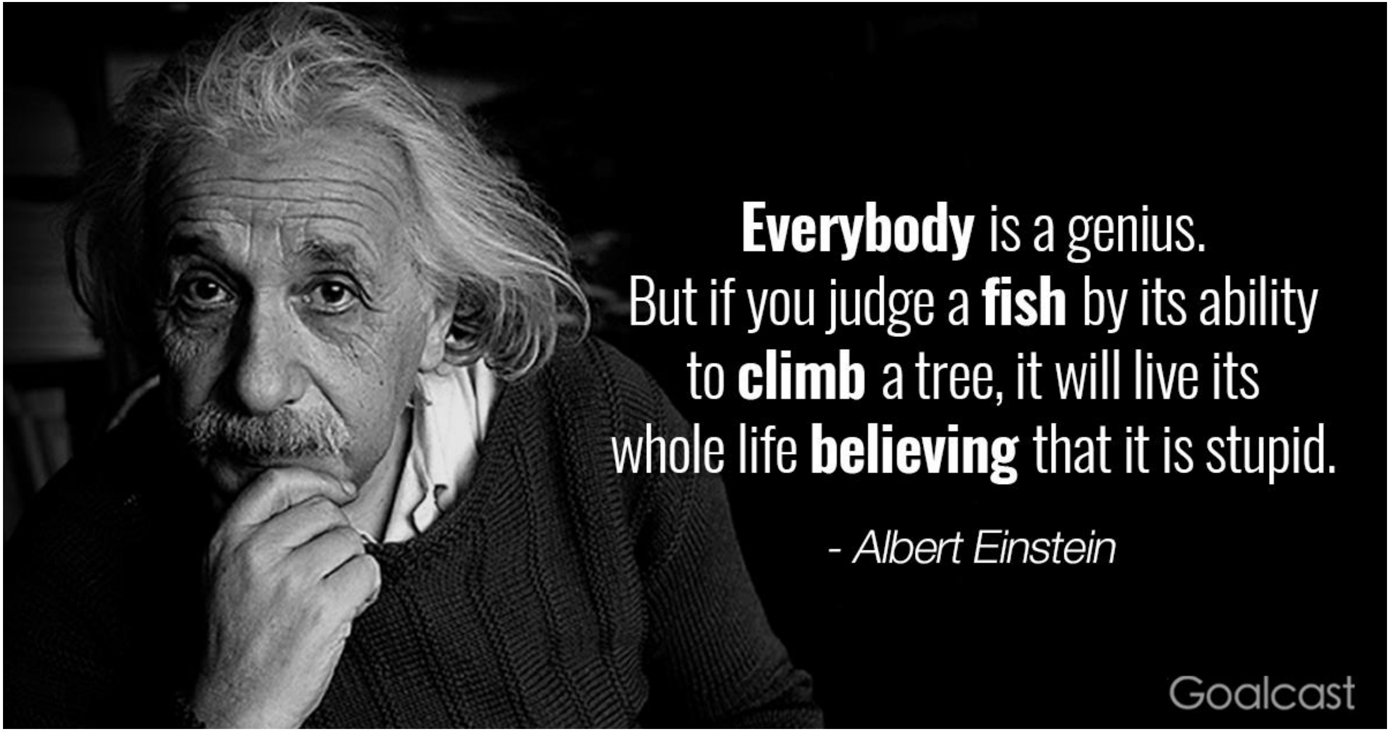
ทฤษฎีสัมพัทธภาพ (Theory of relativity)



(www.ebay.com/itm/Albert-Einstein-E-MC2-POSTER-/322249822978)

ผลงานอื่นๆ ของ "Albert Einstein" (14 March 1879 – 18 April 1955)

"Photoelectric Effect" (→ Nobel Prize in Physics 1921: "for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect"), Emission and Absorption of Electromagnetic waves [→ Einstein's "A" and "B" Coefficients → "หลักการทำงาน" ของ "LASER" (<u>L</u>ight <u>A</u>mplification by <u>S</u>timulated <u>E</u>mission of <u>R</u>adiation)], …



(www.goalcast.com/2017/03/29/top-30-most-inspiring-albert-einstein-quotes/)

ทฤษฎีสัมพัทธภาพ
(Theory of Relativity)

(ทฤษฎี) สัมพัทธภาพพิเศษ
(Special Relativity)

(ทฤษฎี) สัมพัทธภาพทั่วไป
(General Relativity)

ขอบเขตของ Special Relativity

ศึกษา "ความสัมพันธ์" ระหว่าง "ผลที่ได้" จาก "การสังเกต (เหตุการณ์/ปรากฏการณ์)" หรือ "การวัด (ปริมาณทางฟิสิกส์)" โดย "ผู้สังเกต (observers)" ที่อยู่ใน "กรอบอ้างอิงเฉื่อย (Inertial Reference Frames)" [กรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่สัมพัทธกันด้วย "ความเร็วคงที่" หรือ กรอบอ้างอิงที่ "Newton's First Law of Motion" (หรือ "Law of Inertia") เป็นจริง]

ขอบเขตของ General Relativity

ใช้ได้ทั้งใน “กรอบอ้างอิงเฉื่อย” และใน “กรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง (accelerated reference frames)” $\rightarrow$ อธิบาย “ความโน้มถ่วง (gravitation)” ได้

“General relativity” (“GR”, also known as the “general theory of relativity” or “GTR”) <u>is</u> the “geometric” theory of “gravitation” published by “Albert Einstein” in 1915 <u>and</u> the “current” description of “gravitation” in modern physics. “General relativity” has been described as the “most beautiful” of all existing physical theories.

“General relativity” generalizes “special relativity” and “Newton's law of universal gravitation”, providing a “unified” description of “gravity” as a “geometric property” of “space and time”(or “spacetime”).

In particular, the “curvature” of “spacetime” is directly related to the “energy” and “momentum” of whatever “matter” and “radiation” are present. The “relation” is specified by the “Einstein field equations”, a system of partial differential equations.

[https://en.wikipedia.org/wiki/General_relativity (14 มีนาคม 2561)]

“หัวข้อที่จะศึกษา” ใน “Special Relativity”

(1) หลักการสัมพัทธภาพพิเศษ (Special Principle of Relativity)

(2) “สัมพัทธภาพ” แบบ “กาลิเลียน” (Galilean Relativity) [→ “การแปลง” แบบ “กาลิเลียน” (Galilean Transformation)]

(3) “สัจพจน์” ของ “ไอนสไตน์” (Einstein’s Postulates)

(4) “การแปลง” แบบ “โลเร็นตซ์” (Lorentz Transformation)

→ “ระยะทาง” และ “ช่วงเวลา” ระหว่าง “เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์”

→ การ “ยืด (ออก)” ของ “ช่วงเวลา” (Time Dilation)

→ การ “หด (สั้น)” ของ “ความยาว” (Length Contraction)

→ การแปลงความเร็ว (Velocity Transformation)

(5) ปรากฏการณ์ “ดอปเพลอร์” เชิงสัมพัทธภาพ (Relativistic Doppler Effect)

(6) โมเมนตัม (เชิงเส้น) เชิงสัมพัทธภาพ (Relativistic (Linear) Momentum)

(7) พลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพ (Relativistic Kinetic Energy, K), พลังงานเชิงสัมพัทธภาพรวม (Total Relativistic Energy, E) และ พลังงานนิ่ง (Rest Energy, E_0)

(1) หลักการสัมพัทธภาพพิเศษ (Special Principle of Relativity)

"กฎทางฟิสิกส์" จะ "เหมือนกัน" ใน "ทุกกรอบอ้างอิงเฉื่อย"
(The laws of physics are the same in all inertial frames)

"รูปแบบ (form)" ของ "กฎทางฟิสิกส์" จะ "เหมือนกัน"
"ค่าที่ได้จากการวัด" อาจจะ "แตกต่างกัน" ได้ (โดยทั่วไป "มักจะต่างกัน")

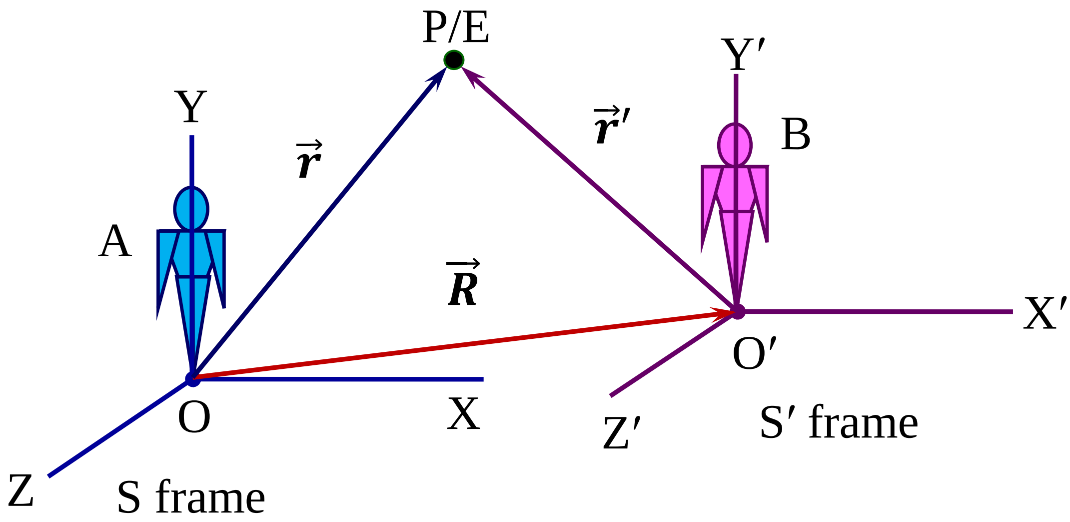
ข้อตกลงเบื้องต้น

จะพิจารณา "กรอบอ้างอิงเฉื่อย 2 กรอบ" → "S" และ "S′"

กรอบอ้างอิงเฉื่อย "S" : "อยู่นิ่ง" มี "ผู้สังเกต A" สังเกต/ศึกษา "วัตถุ/อนุภาค (P)" หรือ "เหตุการณ์ (Event, E)" และระบุ "ผลการสังเกต/ศึกษา" โดยใช้ "$(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = (x, y, z, t)$"

กรอบอ้างอิงเฉื่อย "S′" : "เคลื่อนที่" เทียบกับ "S" ด้วย "ความเร็ว $\mathbf{V}$ คงที่" มี "ผู้สังเกต B" ระบุผลการสังเกต/ศึกษา โดยใช้ "$(\vec{\boldsymbol{r}}', t') = (x', y', z', t')$"

“S′” เคลื่อนที่ ด้วย “ความเร็ว $\vec{\boldsymbol{V}}$ คงที่” เทียบกับ “S” $\rightarrow$ $\vec{\boldsymbol{V}} = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{R}}}{dt} = \text{constant}$



ผู้สังเกต “A” (อยู่นิ่งใน “S”) ระบุ “ผลการสังเกต/ศึกษา” โดยใช้ $(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = (x, y, z, t)$

ผู้สังเกต “B” (อยู่นิ่งใน “S′”) ระบุ “ผลการสังเกต/ศึกษา” โดยใช้ $(\vec{\boldsymbol{r}}', t') = (x', y', z', t')$

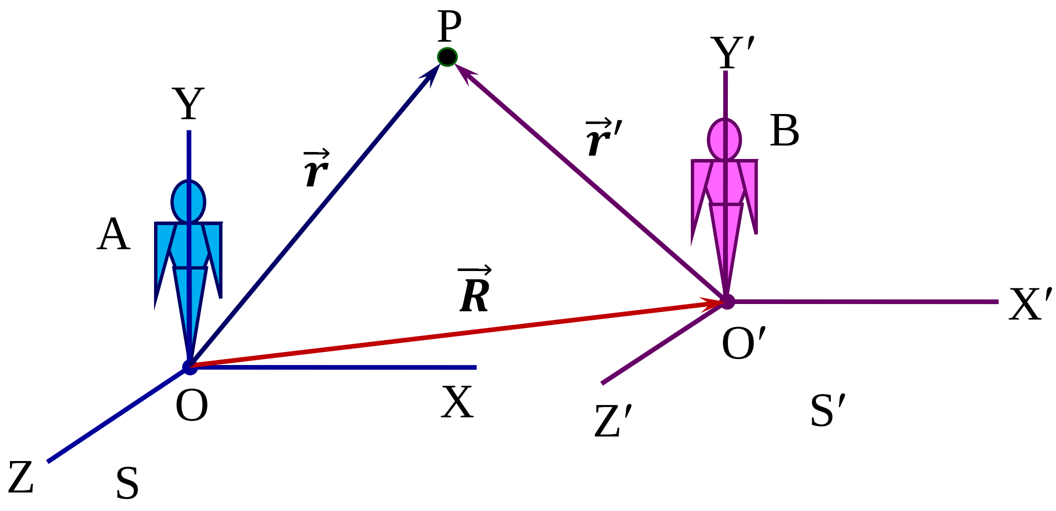
$\rightarrow$ ศึกษา “ความสัมพันธ์” ระหว่าง $(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = (x, y, z, t)$ กับ $(\vec{\boldsymbol{r}}', t') = (x', y', z', t')$

(2) สัมพัทธภาพแบบกาลิเลียน (Galilean Relativity)

ก่อนปี ค.ศ. 1905 → เชื่อกันว่า $t = t'$ → "Absolute" Time

("เวลา" เป็น "ปริมาณสัมบูรณ์" ไม่ว่าจะวัดโดยใคร ก็จะได้ผล "เหมือนกัน")

พิจารณา "การเคลื่อนที่" ของ "วัตถุ P": → $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$ หรือ $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}$



$\vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{R}}$ → "A" และ "B" จะวัด "ตำแหน่ง" ของ "วัตถุ P" ได้ "ต่างกัน"

หา "อนุพันธ์" เทียบกับ "เวลา" จะได้ "ความเร็ว (velocity)":

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}'}{dt} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} - \frac{d\vec{\boldsymbol{R}}}{dt} \rightarrow \vec{\boldsymbol{u}}' = \vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{V}} \rightarrow$$

"A" และ "B" จะวัด "ความเร็ว" ของ "วัตถุ P" ได้ "ต่างกัน"

หา "อนุพันธ์" เทียบกับ "เวลา" จะได้ "ความเร่ง (acceleration)": (ระลึกว่า V คงที่)

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}'}{dt} = \frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt} - \frac{d\vec{\boldsymbol{V}}}{dt} \rightarrow \vec{\boldsymbol{a}}' = \vec{\boldsymbol{a}} \rightarrow$$

"A" และ "B" จะวัด "ความเร่ง" ของ "วัตถุ P" ได้ "เหมือนกัน/เท่ากัน"

จาก $\vec{\boldsymbol{V}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{R}}}{dt} = \text{constant}$ จะได้ $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{R}}(t) = \vec{\boldsymbol{R}}(t=0) + \vec{\boldsymbol{V}}t = \vec{\boldsymbol{R}}_0 + \vec{\boldsymbol{V}}t$

ดังนั้น "ความสัมพันธ์" ระหว่าง $(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = (x, y, z, t)$ กับ $(\vec{\boldsymbol{r}}', t') = (x', y', z', t')$ คือ

$$\vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{R}}_0 - \vec{\boldsymbol{V}}t$$

$$\vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{R}}_0 - \vec{\boldsymbol{V}}t$$

ในกรณีพิเศษที่ $\vec{\boldsymbol{R}}_0 = 0$ (“กรอบอ้างอิง” ทั้งสอง “ซ้อนทับกัน” ที่เวลา $t = t' = 0$) จะได้

$$\vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{V}}t$$

ในกรณีพิเศษที่ $\vec{\boldsymbol{V}} = V\hat{\boldsymbol{e}}_x = V\hat{\boldsymbol{\imath}}$ (มีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ “เฉพาะในแนวแกน + X”) จะได้

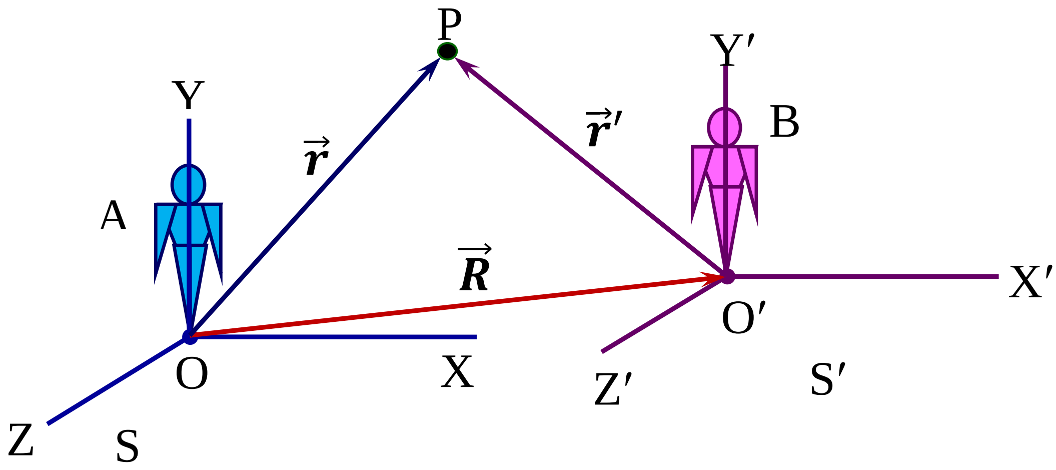
$$x' = x - Vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

“Galilean” Transformation

$$\leftrightarrow$$

$$x = x' + Vt' \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = t'$$

“Inverse” Galilean Transformation



$$x' = x - Vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

“Galilean” Transformation

$$\leftrightarrow$$

$$x = x' + Vt'$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = t'$$

“Inverse” Galilean Transformation

“Classical Electromagnetism” ขัดแย้ง/ไม่สอดคล้องกับ Galilean Relativity

ในปี ค.ศ. 1873 James Clerk Maxwell (1831-1879) ทำนาย โดยใช้ “Classical Electromagnetism” ว่า

มี “คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetic Waves – EM waves)”
ซึ่งเคลื่อนที่ใน “สุญญากาศ” ด้วย “อัตราเร็วคงที่”
$$c = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

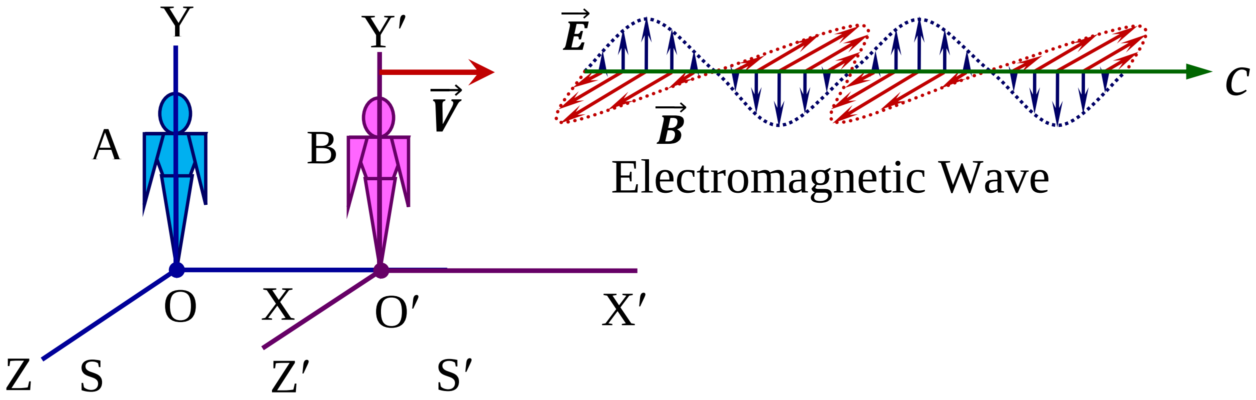
(Wave Equation สำหรับ EM Wave จะมีรูปเป็น $\nabla^2 \begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{B}} \\ \vec{\boldsymbol{E}} \end{Bmatrix} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{B}} \\ \vec{\boldsymbol{E}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{B}} \\ \vec{\boldsymbol{E}} \end{Bmatrix}$)

ในปี ค.ศ. 1887 Heinrich Hertz (1857-1894) ทดลองพบว่า

“มี EM waves จริง” และ “EM waves” มี/แสดง “สมบัติ” เหมือน “แสง”
{การสะท้อน (reflection), การหักเห (refraction), โพราไรเซชัน (polarization), …}

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ **“แสง” เป็น “คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า”** $\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow$

พิจารณา “สถานการณ์” ดังแสดงในรูป



คำถาม ถ้า ผู้สังเกต “A” วัด “อัตราเร็วของ EM wave” ได้เท่ากับ “c” ถามว่า

ผู้สังเกต “B” จะวัด “อัตราเร็วของ EM wave” ได้เท่าใด

คำตอบ (?) ถ้าใช้ “สัมพัทธภาพแบบกาลิเลียน” จะได้ว่า

ผู้สังเกต “B” ควรจะวัด “อัตราเร็วของ EM wave” ได้เท่ากับ

“$c' = c - V$”

จาก “การทดลอง” วัด “อัตราเร็วของแสง” (ซึ่ง “เร็วมากๆ”) โดยใช้ “วิธีการต่างๆ” พบว่า

“อัตราเร็วของแสง” ใน “สุญญากาศ” มีค่า “คงตัว” เท่ากับ $c \approx 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$
โดย “ไม่ขึ้นกับ” การเคลื่อนที่ทั้งของ “แหล่งกำเนิดแสง” และ “ผู้สังเกต”

$\downarrow$

ผู้สังเกต “A” และ ผู้สังเกต “B” จะวัด “อัตราเร็วของ EM wave” ได้ “เท่ากัน”

$\downarrow$

“คำตอบ” ที่ได้จากการใช้ “สัมพัทธภาพแบบกาลิเลียน” นั้น “ไม่ถูกต้อง”
(ถึงแม้ว่า ดูจะ “สอดคล้อง” กับ “ประสบการณ์ในชีวิตประจำวัน”)

$\downarrow$

จำเป็นต้อง “ปรับปรุง/แก้ไข”

(3) “สัจพจน์” ของ “ไอนส์ไตน์” (Einstein’s Postulates)

ปี 1905 “Einstein” เสนอ “สัจพจน์ 2 ข้อ” (ซึ่งเป็น “พื้นฐาน” ของ “สัมพันธภาพพิเศษ”):

(i) “กฎทางฟิสิกส์” จะ “เหมือนกัน” ใน “ทุกกรอบอ้างอิงเฉื่อย”

(ii) “อัตราเร็วของแสง” ใน “สุญญากาศ” มีค่า “ไม่ขึ้นกับ” การเคลื่อนที่ของ “แหล่งกำเนิด” และ “ผู้สังเกต” หรือ “อัตราเร็วของแสง” มีค่า “คงตัว” ใน “ทุกกรอบอ้างอิงเฉื่อย”

$\downarrow$

“ความสัมพันธ์” ระหว่าง $(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = (x, y, z, t)$ กับ $(\vec{\boldsymbol{r}}', t') = (x', y', z', t')$

จะ “ไม่” เป็นไปตาม “Galilean” Transformation $(\vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{V}}t)$

และ

$t \neq t'$ $\rightarrow$ “Relative” Time

(“เวลา” เป็น “ปริมาณสัมพัทธ์” มีค่า “ขึ้นกับ” ผู้สังเกต)

(4) “การแปลง” แบบ “โลเร็นตซ์” (Lorentz Transformation)

“ความสัมพันธ์” ระหว่าง $(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = (x, y, z, t)$ กับ $(\vec{\boldsymbol{r}}', t') = (x', y', z', t')$ ที่เป็นไปตาม “Einstein’s Postulates” เรียกว่า “Lorentz” Transformation

สำหรับกรณีที่ กรอบอ้างอิง “S” และ “S′” (i) “ซ้อนทับกัน” ที่เวลา $t = t' = 0$ และ (ii) มีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ “เฉพาะในแนวแกน + X” ($\vec{\boldsymbol{V}} = V\hat{\boldsymbol{e}}_x = V\hat{\boldsymbol{\imath}}$) จะได้

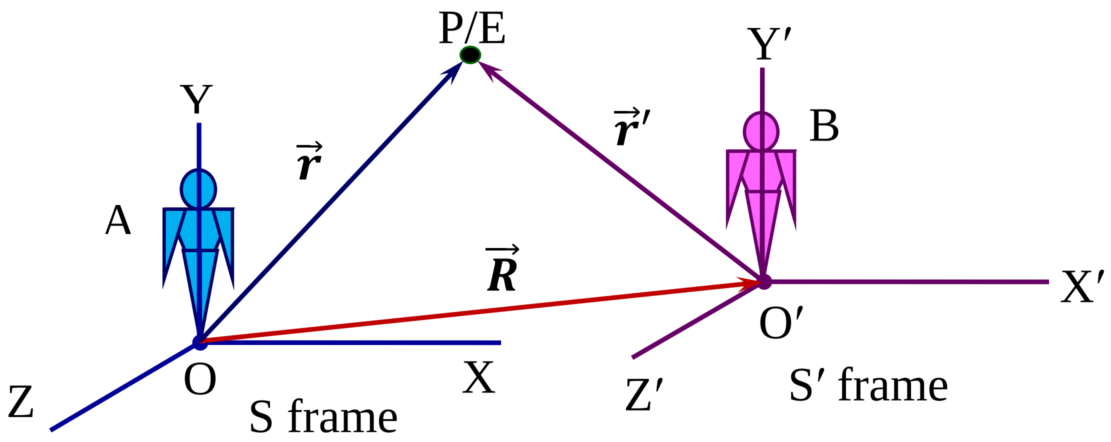
$$\boxed{x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)}$$

เมื่อ $\boxed{\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$ $\left(\beta \equiv \dfrac{V}{c}\right)$ คือ “Lorentz” หรือ “relativistic” factor

เนื่องจาก $V \le c$ เสมอ (ไม่มีอะไรเร็วกว่า “แสงในสุญญากาศ”) ดังนั้น $\gamma \ge 1$ เสมอ

$$(V \le c \;\rightarrow\; \beta \le 1 \;\rightarrow\; \beta^2 \le 1 \;\rightarrow\; 1-\beta^2 \le 1 \rightarrow \sqrt{1-\beta^2} \le 1 \;\rightarrow\; \gamma \ge 1)$$

ในกรณีที่ $V \ll c$ จะได้ $\beta \rightarrow 0$ และ $\gamma \rightarrow 1$ (“Lorentz” จะกลายเป็น “Galilean”)



$$x' = \gamma(x - Vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)$$

$\leftrightarrow$

$$x = \gamma(x' + Vt')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right)$$

“Lorentz” Transformation

“Inverse” Lorentz Transformation

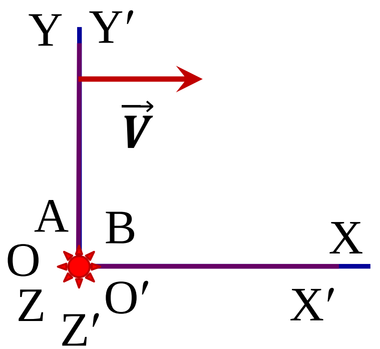
Derivation of Lorentz Transformation

(i) สมมุติว่า "ความสัมพันธ์" ระหว่าง "x" กับ "x'" เป็นไปตามสมการ

$$x' = \gamma(x - Vt) \quad \text{และ} \quad x = \gamma(x' + Vt')$$

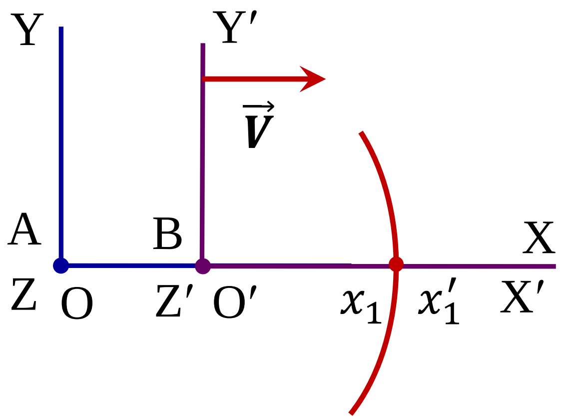
→ ต่างจาก Galilean Transformation ตรงที่มี factor "γ" ซึ่ง "ต้องหาค่า"

(ii) พิจารณา "สถานการณ์" หรือ "การทดลองในความคิด (Thought Experiment)" ดังรูป



$$\boxed{t = t' = 0}$$

มี "light pulse" เกิดขึ้น
ที่ "จุดกำเนิด"



"หน้าคลื่นของแสง" ที่เวลา "t_1" ใน "S" frame
ซึ่งตรงกับเวลา "t_1'" ใน "S′" frame

(iii) เนื่องจาก "แสง" เคลื่อนที่ด้วย "อัตราเร็ว c คงตัว" ใน "ทุกกรอบอ้างอิง" ดังนั้น ที่เวลา "$t = t_1$" ใน "S" frame ซึ่งตรงกับ เวลา "$t' = t_1'$" ใน "S′" frame

"หน้าคลื่นของแสง" ซึ่งเกิดขึ้นที่เวลา "$t = t' = 0$"
จะเคลื่อนที่ไปอยู่ที่ตำแหน่ง "$x = x_1 = ct_1$" ใน "S" frame
ซึ่งตรงกับตำแหน่ง "$x' = x_1' = ct_1'$" ใน "S′" frame

(iv) แทน $x = x_1 = ct_1$ และ $x' = x_1' = ct_1'$ ลงใน "สมการในข้อ (i)"

$$x' = \gamma(x - Vt) \qquad \text{และ} \qquad x = \gamma(x' + Vt')$$

จะได้ $$ct_1' = \gamma(ct_1 - Vt_1) \qquad \text{และ} \qquad ct_1 = \gamma(ct_1' + Vt_1')$$

$$\rightarrow \qquad c^2 t_1 t_1' = \gamma^2 t_1 t_1'(c - V)(c + V) = \gamma^2 t_1 t_1'(c^2 - V^2)$$

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - V^2)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$ = "Lorentz" หรือ "relativistic" factor $\left(\beta \equiv \frac{V}{c}\right)$

(v) แทน $x' = \gamma(x - Vt)$ ลงใน $x = \gamma(x' + Vt')$ จะได้

$$x = \gamma\{\gamma(x - Vt) + Vt'\} = \gamma^2(x - Vt) + \gamma Vt'$$

$$x = \gamma^2 x - \gamma^2 Vt + \gamma Vt'$$

$$\gamma Vt' = \gamma^2 Vt + (1 - \gamma^2)x$$

$$t' = \gamma t + \frac{(1 - \gamma^2)}{\gamma V}x = \gamma t - \frac{\gamma Vx}{c^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)}$$

ระลึกว่า

$$1 - \gamma^2 = \gamma^2\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) = \gamma^2\{(1 - \beta^2) - 1\} = \gamma^2\left\{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - 1\right\}$$

$$1 - \gamma^2 = -\frac{\gamma^2 V^2}{c^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{1 - \gamma^2}{\gamma V} = -\frac{\gamma V}{c^2}}$$

"ผลสืบเนื่อง" จาก "Lorentz Transformation"

(4.1) "ระยะทาง" และ "ช่วงเวลา" ระหว่าง "เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์"

"S′-frame" เคลื่อนที่ด้วย "ความเร็ว $\vec{\boldsymbol{V}} = V\hat{\boldsymbol{e}}_x = V\hat{\boldsymbol{\imath}}$ คงที่" เทียบกับ "S-frame"

		ผู้สังเกต "A"	ผู้สังเกต "B"
เหตุการณ์ 1 (E1)	$\rightarrow$	(x_1, t_1)	(x'_1, t'_1)
เหตุการณ์ 2 (E2)	$\rightarrow$	(x_2, t_2)	(x'_2, t'_2)
"ระยะทาง" ระหว่าง "E1" และ E2"	$\rightarrow$	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta x' = x'_2 - x'_1$
"ช่วงเวลา" ระหว่าง "E1" และ "E2"	$\rightarrow$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta t' = t'_2 - t'_1$

จาก "Lorentz Transformation" จะได้

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - Vt_2) - \gamma(x_1 - Vt_1) = \gamma(\Delta x - V\Delta t)$$

และ $$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - \frac{Vx_2}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{Vx_1}{c^2}\right) = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right)$$

(ซึ่งสามารถ "หาได้โดยตรง" จาก "Lorentz Transformation" โดยใช้ "Calculus")

จาก $\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t)$ และ $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right)$ จะได้ว่า

“เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์” ที่ “เกิดขึ้นที่ตำแหน่งเดียวกัน” ใน “กรอบอ้างอิงเฉื่อยกรอบหนึ่ง”
จะ “เกิดขึ้นที่คนละตำแหน่ง” ใน “กรอบอ้างอิงเฉื่อยอื่นๆ”
ยกเว้นกรณีที่ “เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์” นั้น “เกิดขึ้นพร้อมกัน” ด้วย

$\Delta x = 0 \;\not\Rightarrow\; \Delta x' = 0$ ยกเว้นกรณีที่ $\Delta t = 0$ ด้วย

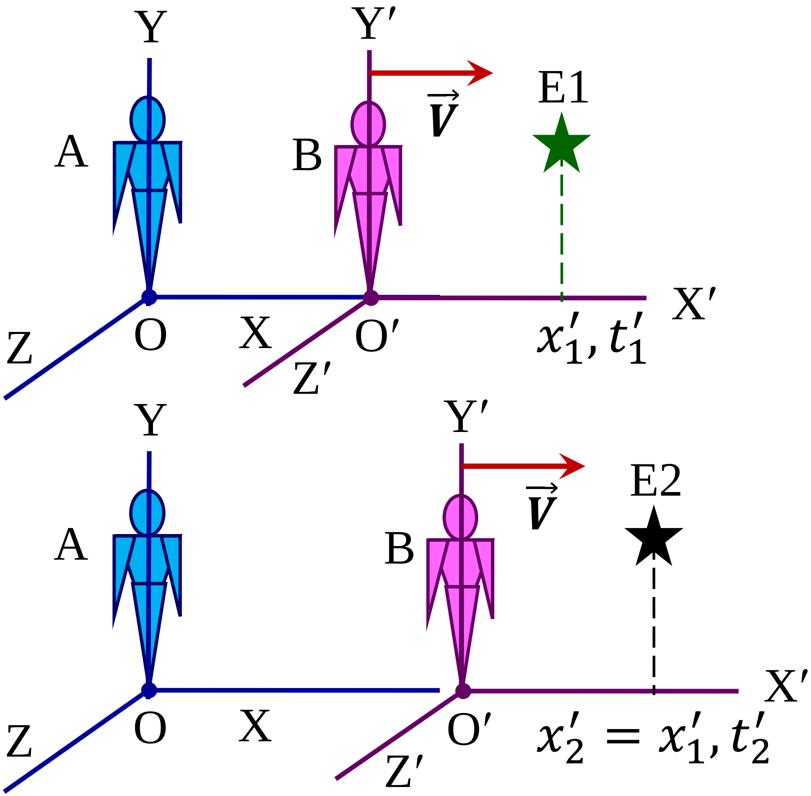
และ

“เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์” ที่ “เกิดขึ้นพร้อมกัน” ใน “กรอบอ้างอิงเฉื่อยกรอบหนึ่ง”
จะเกิดขึ้น “ไม่พร้อมกัน” ใน “กรอบอ้างอิงเฉื่อยอื่นๆ”
ยกเว้นกรณีที่ “เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์” นั้น “เกิดขึ้นที่ตำแหน่งเดียวกัน” ด้วย

$\Delta t = 0 \;\not\Rightarrow\; \Delta t' = 0$ ยกเว้นกรณีที่ $\Delta x = 0$ ด้วย

$\rightarrow$ “สัมพัทธภาพ” ของ “การเกิดขึ้นพร้อมกัน” (Relativity of Simultaneity)

(4.2) การ "ยืด (ออก)" ของ "ช่วงเวลา" (Time Dilation)



ใน "S′" frame: "E1" & "E2" เกิดขึ้นที่ "ตำแหน่งเดียวกัน"

"B" จะสังเกตเห็น "E1" เกิดขึ้นที่

(x_1', t_1')

และสังเกตเห็น "E2" เกิดขึ้นที่

$(x_2' = x_1', t_2')$

"A" จะสังเกตเห็น "E1" เกิดขึ้นที่

(x_1, t_1)

และสังเกตเห็น "E2" เกิดขึ้นที่

(x_2, t_2)

“proper” time interval (ช่วงเวลา “มาตรฐาน”) ระหว่าง “เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์” (Δt_0)

$\equiv$ “ช่วงเวลา” ระหว่าง “เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์” ที่วัด (โดยผู้สังเกตที่อยู่) ใน กรอบอ้างอิงที่เหตุการณ์ทั้งสอง “เกิดขึ้นที่ตำแหน่งเดียวกัน” (วัดโดยผู้สังเกตที่ “อยู่นิ่งเทียบกับเหตุการณ์” $\rightarrow$ สามารถใช้ “นาฬิกาเรือนเดียว” ในการจับเวลา)

เนื่องจาก “E1” และ “E2” เกิดขึ้นที่ “ตำแหน่งเดียวกัน” ใน “S′-frame” ดังนั้น “ช่วงเวลา” ระหว่าง “E1” และ “E2” ที่วัดโดย “B” จะเป็น “proper” time interval

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \Delta t_0 = \text{“proper” time interval}$$

“ช่วงเวลา” ระหว่าง “E1” และ “E2” ที่วัดโดย “A” ($\Delta t = t_2 - t_1$) จะหาได้จาก “inverse” Lorentz transformation:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \rightarrow t = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right) \rightarrow \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{V\Delta x'}{c^2}\right)$$

ในกรณีนี้ $\Delta t' = \Delta t_0$ (“proper” time interval) และ $\Delta x' = x_2' - x_1' = 0$ ดังนั้น

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \Delta t_0$$

→ $$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \Delta t_0$$

เมื่อ $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ = “Lorentz” หรือ “relativistic” factor และ $\beta \equiv \dfrac{V}{c}$

เนื่องจาก $\gamma \geq 1$ เสมอ ดังนั้น จะได้ว่า $\Delta t \geq \Delta t_0$ นั่นคือ

“proper” time interval (Δt_0)

จะเป็น “ช่วงเวลา” ที่ “สั้นที่สุด” ระหว่าง “2 เหตุการณ์”

วัดโดยผู้สังเกตที่ “อยู่นิ่งเทียบกับทั้ง 2 เหตุการณ์”

(อยู่ในกรอบอ้างอิงที่เหตุการณ์ทั้งสอง “เกิดขึ้นที่ตำแหน่งเดียวกัน”)

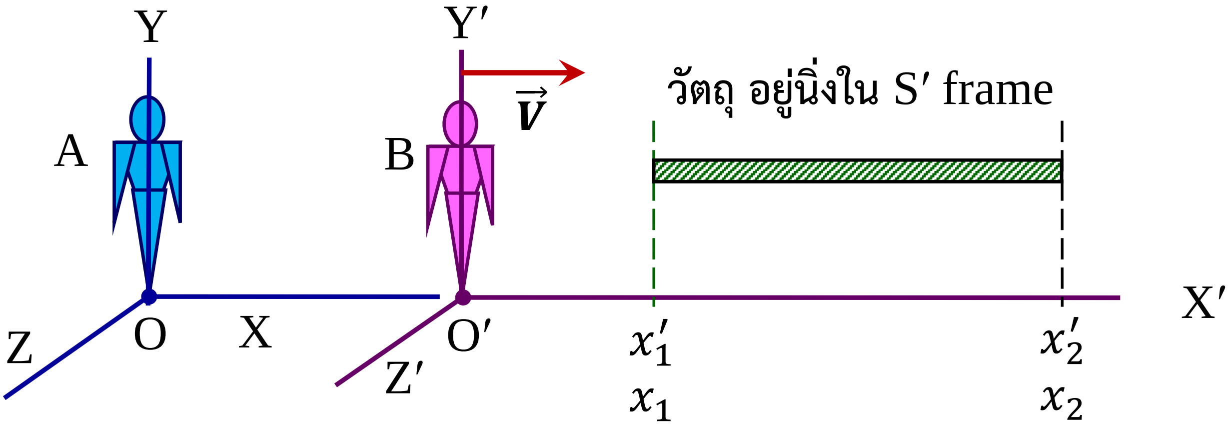
และ

ผู้สังเกตคนอื่นๆ ซึ่ง “เคลื่อนที่เทียบกับเหตุการณ์”

จะวัด “ช่วงเวลา” ระหว่าง “2 เหตุการณ์” ได้ “ยาวขึ้น”

→ การ “ยืด (ออก)” ของ “ช่วงเวลา” (Time Dilation)

(4.3) การ "หด (สั้น)" ของ "ความยาว" (Length Contraction)



"proper" length (ความยาว "มาตรฐาน") ของ "วัตถุ" (L_0)

≡ "ความยาว" ของ "วัตถุ" ที่วัด (โดยผู้สังเกตที่อยู่) ใน กรอบอ้างอิงที่วัตถุ "อยู่นิ่ง" (วัดโดยผู้สังเกตที่ "อยู่นิ่งเทียบกับวัตถุ")

พิจารณากรณีที่ “วัตถุอยู่นิ่งใน S′-frame”:

“B” จะทำการ “วัดตำแหน่ง” x_1' และ x_2' ที่ “เวลาใดก็ได้” (t_1' และ t_2' เป็น “เท่าไรก็ได้”)

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = L_0 = \text{“proper” length}$$

“A” จะ “ต้อง” ทำการ “วัดตำแหน่ง” x_1 และ x_2 ที่ “เวลาเดียวกัน” $t_1 = t_2$

จาก “Lorentz” transformation, $x' = \gamma(x - Vt)$, จะได้ $\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t)$

ในกรณีนี้ $\Delta x' = L_0$ (“proper” length), $\Delta x = x_2 - x_1 = L$ & $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$

ดังนั้น $L_0 = \gamma L$ หรือ $L = L_0/\gamma$

เนื่องจาก $\gamma \geq 1$ ดังนั้น $L \leq L_0$

→ “proper” length (L_0) จะเป็น “ความยาว” ที่ “มากที่สุด” ของวัตถุ

(วัดโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่งเทียบกับวัตถุ)

→ ผู้สังเกตคนอื่นๆ ซึ่ง “เคลื่อนที่เทียบกับวัตถุ” จะวัด “ความยาว” ของ “วัตถุ” ได้ “สั้นลง”

→ การ “หด (สั้น)” ของ “ความยาว” (Length Contraction)

(4.4) การแปลงความเร็ว (Velocity Transformation)

เนื่องจาก $t' \neq t$ ("relative" time) ดังนั้น $\Delta t' \neq \Delta t$

พิจารณา "การเคลื่อนที่" ของ "วัตถุ" เมื่อสังเกตโดย ผู้สังเกต "A" และ ผู้สังเกต "B"

	"ตำแหน่ง (position)"	"ความเร็ว (velocity)"
ผู้สังเกต "A" $\rightarrow$	$(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = (x, y, z, t)$	$\boxed{\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t}}$ $u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}, u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, u_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}$
ผู้สังเกต "B" $\rightarrow$	$(\vec{\boldsymbol{r}}', t') = (x', y', z', t')$	$\boxed{\vec{\boldsymbol{u}}' = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}'}{\Delta t'}}$ $u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}, u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}, u'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'}$

จาก “Lorentz” transformation จะได้

$$x' = \gamma(x - Vt) \quad \rightarrow \quad \Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t)$$

$$y' = y, \quad z' = z \quad \rightarrow \quad \Delta y' = \Delta y, \Delta z' = \Delta z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \quad \rightarrow \quad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V\Delta x}{c^2}\right)$$

ดังนั้น

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - V\Delta t)}{\gamma\left(\Delta t - \frac{V\Delta x}{c^2}\right)} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - V}{1 - \frac{V}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{u_x - V}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma\left(\Delta t - \frac{V\Delta x}{c^2}\right)} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{Vu_x}{c^2}\right)} \neq u_y$$

$$u'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{\Delta z}{\gamma\left(\Delta t - \frac{V\Delta x}{c^2}\right)} = \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{Vu_x}{c^2}\right)} \neq u_z$$

"การแปลงความเร็ว" ใน "Special" Relativity จะ "ต่างจาก" ใน "Galilean" Relativity

"Special" → $u_x' = \dfrac{u_x - V}{1 - \dfrac{Vu_x}{c^2}}$, $u_y' = \dfrac{u_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{Vu_x}{c^2}\right)}$, $u_z' = \dfrac{u_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{Vu_x}{c^2}\right)}$

"Galilean" → $u_x' = u_x - V$ $\quad u_y' = u_y$ $\quad u_z' = u_z$

ในกรณีที่ "วัตถุ" คือ "คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (แสง)" ซึ่งกำลัง "เคลื่อนที่ในแนวแกน X" ด้วย "อัตราเร็ว c" เทียบกับ "ผู้สังเกต A" → $u_x = c, u_y = 0, u_z = 0$

"ผู้สังเกต B" ก็จะวัดอัตราเร็วของแสงได้เป็น "c" ด้วย

$$u_x' = \frac{u_x - V}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}} \rightarrow \frac{c - V}{1 - \frac{Vc}{c^2}} = c,\ u_y' = 0,\ u_z' = 0$$

ซึ่งเป็นไปตาม "สัจพจน์ข้อที่ 2" ของ "Einstein" (→ อัตราเร็วของแสง "คงตัว" ใน "ทุกกรอบอ้างอิงเฉื่อย")

(ถ้าใช้ "Galilean" จะได้ $u_x' = c - V, u_y' = 0, u_z' = 0$ ซึ่งไม่ตรงกับผลการทดลอง)

(5) ปรากฏการณ์ "ดอปเพลอร์" เชิงสัมพัทธภาพ (Relativistic Doppler Effect)

"ความถี่ (frequency, f)"/"ความยาวคลื่น (wavelength, λ)" ของ "แสง"
ที่ "ผู้สังเกต/ผู้รับ (observer/receiver)" เห็น/ได้รับ
ต่างจาก
"ความถี่"/"ความยาวคลื่น" ของ "แสง" ที่ออกจาก "แหล่งกำเนิดแสง (light source)"
ซึ่งเป็นผลจาก
"การเคลื่อนที่สัมพัทธ์" ระหว่าง "แหล่งกำเนิดแสง" กับ "ผู้สังเกต"

$f_S\ (\lambda_S)$ = "ความถี่" ("ความยาวคลื่น") ของ "คลื่น" ที่ออกจาก "แหล่งกำเนิดคลื่น"

$f_R\ (\lambda_R)$ = "ความถี่" ("ความยาวคลื่น") ของ "คลื่น" ที่ "ผู้สังเกต/ผู้รับ" เห็น/ได้รับ

V = "อัตราเร็วสัมพัทธ์" ระหว่าง "(กรอบอ้างอิงของ) แหล่งกำเนิด (source frame)"
กับ "(กรอบอ้างอิงของ) ผู้สังเกต/ผู้รับ (observer/receiver frame)"

กรณีที่ “แหล่งกำเนิดแสง” กับ “ผู้สังเกต” เคลื่อนที่ “เข้าหากัน”

(“ใคร” เคลื่อนที่ “ก็ได้” โดยที่ “ผลโดยรวม” คือ “แหล่งกำเนิด” กับ “ผู้สังเกต” ขยับ “เข้าใกล้กัน”)

→ “ความยาวคลื่น” ของแสง ที่ “ผู้สังเกต” ได้รับ จะ “ลดลง” ($\lambda_R < \lambda_S$)

→ “ความถี่” ของแสง ที่ “ผู้สังเกต” ได้รับ จะ “เพิ่มขึ้น” ($f_R > f_S$)

→ $$f_R = \left(\sqrt{\frac{c+V}{c-V}}\right) f_S$$ (เข้าหา → λ ลด → f เพิ่ม)

กรณีที่ “แหล่งกำเนิดแสง” กับ “ผู้สังเกต” เคลื่อนที่ “ออกจากกัน”

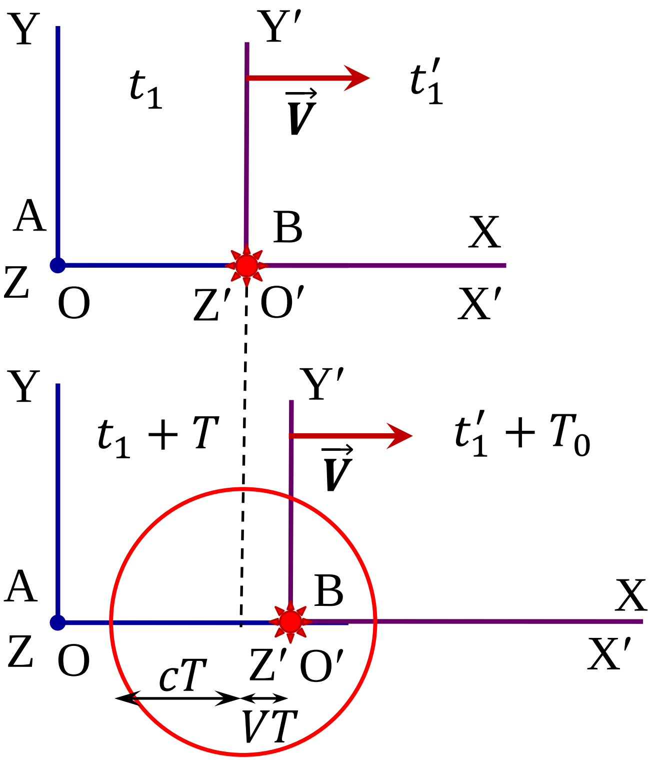
(“ใคร” เคลื่อนที่ “ก็ได้” โดยที่ “ผลโดยรวม” คือ “แหล่งกำเนิด” กับ “ผู้สังเกต” ขยับ “ออกจากกัน”)

→ “ความยาวคลื่น” ของแสง ที่ “ผู้สังเกต” ได้รับ จะ “เพิ่มขึ้น” ($\lambda_R > \lambda_S$)

→ “ความถี่” ของแสง ที่ “ผู้สังเกต” ได้รับ จะ “ลดลง” ($f_R < f_S$)

→ $$f_R = \left(\sqrt{\frac{c-V}{c+V}}\right) f_S$$

Derivation of Relativistic Doppler Effect



พิจารณา กรณีที่ “แหล่งกำเนิดแสง” อยู่นิ่ง ที่ “จุดกำเนิด O′” ของ S′ frame → เคลื่อนที่ “หนี” จาก “ผู้สังเกต A” ด้วย “ความเร็ว $\vec{V}$”

ที่เวลา t_1' (ใน S′ frame) [t_1 (ใน S frame)]:
→ “แหล่งกำเนิดแสง” ปล่อย “คลื่นลูกแรก”

ที่เวลา $t_1' + T_0$ (ใน S′ frame) เมื่อ T_0 คือ “proper” period [$t_1 + T$ (ใน S frame)]:
→ “แหล่งกำเนิดแสง” ปล่อย “คลื่นลูกที่สอง”
→ “แหล่งกำเนิดแสง” เคลื่อนไป “ทางขวา” เป็นระยะ VT (วัดโดย A)
→ “หน้าคลื่น” ของ “คลื่นลูกแรก” เดินทางได้ระยะทาง cT (วัดโดย A)

$\rightarrow$ "ความยาวคลื่น" ของแสงที่ "ผู้สังเกต A" ได้รับคือ $\lambda_A = \lambda_R = (c+V)T$ $(\uparrow)$

$\rightarrow$ "ความถี่" ของแสงที่ "ผู้สังเกต A" ได้รับคือ $f_A = f_R = \dfrac{c}{\lambda_R} = \dfrac{c}{(c+V)T}$ $(\downarrow)$

$\because$ $T = \gamma T_0$ โดยที่ $T_0 = \dfrac{1}{f_s}$ = "proper" period ("คาบ" ใน source frame)

$$\rightarrow \quad f_R = \frac{c}{(c+V)T} = \frac{c}{(c+V)\gamma T_0} = \frac{c f_s}{(c+V)\gamma} = \left(\sqrt{\frac{c-V}{c+V}}\right) f_s \quad (\downarrow)$$

$$\left[\frac{c}{(c+V)\gamma} = \frac{c}{c+V}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{c^2-V^2}}{c+V} = \frac{\sqrt{(c+V)(c-V)}}{c+V} = \frac{\sqrt{c-V}}{\sqrt{c+V}}\right]$$

ในกรณีที่ "ผู้สังเกต" กับ "แหล่งกำเนิดแสง" เคลื่อนที่ "ห่างออกจากกัน" จะได้ว่า

"ความถี่" ของแสง "ที่ผู้สังเกตได้รับ" จะ "ลดลง"

$$f_R = \left(\sqrt{\frac{c-V}{c+V}}\right) f_s$$

("ความยาวคลื่น" จะ "เพิ่มขึ้น")

$\downarrow$

เรียก "ปรากฏการณ์" นี้ว่า "Red" Shift

ความยาวคลื่น (λ) $\rightarrow$

แสง (EM waves ในช่วงที่ตามองเห็น): ม่วง คราม น้ำเงิน เขียว เหลือง แสด แดง

$\leftarrow$ ความถี่ (f)

ในกรณีที่ "ผู้สังเกต" กับ "แหล่งกำเนิดแสง" เคลื่อนที่ "เข้าหากัน" จะได้ว่า

→ "ความยาวคลื่น" ของแสงที่ "ผู้สังเกต" ได้รับ คือ $\lambda_R = (c - V)T$ (↓)

→ "ความถี่" ของแสงที่ "ผู้สังเกต" ได้รับ คือ $f_R = \dfrac{c}{\lambda_R} = \dfrac{c}{(c-V)T}$ (↑)

∵ $T = \gamma T_0$ โดยที่ $T_0 = \dfrac{1}{f_s}$ = "proper" period ("คาบ" ใน source frame)

→ $$f_R = \frac{c}{(c-V)T} = \frac{c}{(c-V)\gamma T_0} = \frac{c f_s}{(c-V)\gamma} = \left(\sqrt{\frac{c+V}{c-V}}\right) f_s$$ (↑)

$$\left[\frac{c}{(c-V)\gamma} = \frac{c}{c-V}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{c^2-V^2}}{c-V} = \frac{\sqrt{(c+V)(c-V)}}{c-V} = \frac{\sqrt{c+V}}{\sqrt{c-V}}\right]$$

(6) โมเมนตัม (เชิงเส้น) เชิงสัมพัทธภาพ [Relativistic (Linear) Momentum]

→ เพื่อที่จะให้ "Conservation of (Linear) Momentum: $\sum \vec{\boldsymbol{p}}_{\text{before}} = \sum \vec{\boldsymbol{p}}_{after}$" ยังคง "เป็นจริง" ใน "Special Relativity" จำเป็นต้อง ให้ "นิยาม" ของ "(Linear) Momentum" ใหม่

วัตถุที่มี "มวล m" และกำลัง "เคลื่อนที่" โดยมี "ความเร็ว $\vec{\boldsymbol{u}}$" จะมี "โมเมนตัม (เชิงเส้น) เชิงสัมพัทธภาพ [Relativistic (Linear) Momentum], $\vec{\boldsymbol{p}}$"

$$\vec{\boldsymbol{p}} \equiv \frac{m\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \equiv \gamma m\vec{\boldsymbol{u}}$$

("นิยามเดิม" ใน "Classical Mechanics" คือ $\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{u}}$)

→ ระวัง! ใน "สมการข้างบน" $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ "อัตราเร็ว" ที่ใช้ คือ "อัตราเร็ว" ของ "อนุภาค" (u)

<u>ไม่ใช่</u> "อัตราเร็วสัมพัทธ์ระหว่างกรอบอ้างอิง (V)" <u>แต่</u> นิยมเขียนแทนด้วย "γ" เหมือนกัน (u จะเท่ากับ V เฉพาะกรณีที่ อนุภาคอยู่นิ่ง ใน S′ frame)

ข้อสังเกต หนังสือ "บางเล่ม" จะ นิยาม "Relativistic Mass, m_r" โดยสมการ

$$m_r \equiv \frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

และ เขียน "(Linear) Momentum" ในรูปแบบเดิม

$$\vec{\boldsymbol{p}} = m_r\vec{\boldsymbol{u}}$$

โดยพิจารณาว่า (i) "มวล" ของอนุภาค "เปลี่ยน" กับ "อัตราเร็ว" และ (ii) นิยามของ "(Linear) Momentum" ยัง "คงเดิม"

ในขณะที่ เราจะพิจารณาว่า (i) "มวล" ของอนุภาค ยัง "คงเดิม" (มีเพียง m เดียว) และ (ii) สิ่งที่เปลี่ยน คือ นิยามของ "(Linear) Momentum"

$$\vec{\boldsymbol{p}} \equiv \frac{m\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \equiv \gamma m\vec{\boldsymbol{u}}$$

(7) พลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพ (Relativistic Kinetic Energy, *K*), พลังงานเชิงสัมพัทธภาพรวม (Total Relativistic Energy, *E*) และ พลังงานนิ่ง (Rest Energy, E_0)

(i) Newton's 2nd Law of Motion ในรูป $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt}$ "ใช้ได้" ใน "สัมพัทธภาพพิเศษ"

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}\right)$$

(ii) "พลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพ (Relativistic Kinetic Energy, *K*)" สามารถหาได้จาก ทฤษฎีบท "งาน-พลังงานจลน์" (Work-Kinetic Energy Theorem)

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{\boldsymbol{F}} \circ d\vec{\boldsymbol{S}} = K_2 - K_1$$

ในกรณีที่ "เริ่มจากหยุดนิ่ง" ($\to \vec{\boldsymbol{u}}_1 = 0 \to \vec{\boldsymbol{p}}_1 = 0 \to K_1 = 0$) จะได้

$$K = \int_0^u \vec{\boldsymbol{F}} \circ d\vec{\boldsymbol{S}}$$

พิจารณากรณี “การเคลื่อนที่” ใน “หนึ่ง” มิติ (ในแนวแกน X) จะได้

$$K = \int_0^u F dx = \int_0^u \left(\frac{dp}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) dt = \int_0^u \left(\frac{dx}{dt}\right)\left[\left(\frac{dp}{dt}\right) dt\right] = \int_0^u u dp$$

$$\boxed{K = \int_0^u u d\left(\frac{mu}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}\right) = \int_0^p \frac{cpdp}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{K = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2}$$

(ในเทอมของ p) (ในเทอมของ u) (ในเทอมของ γ)

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}$$

(ตรวจสอบ : $u = 0 \rightarrow p = 0 \rightarrow K = 0 \rightarrow \checkmark$)

(iii) "พลังงานเชิงสัมพัทธภาพรวม (Total Relativistic Energy, E)" และ "พลังงานนิ่ง (Rest Energy, E_0)":

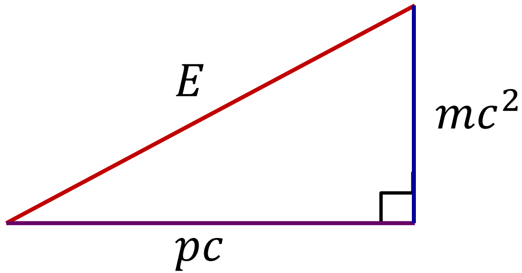
$$\boxed{K = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2}$$

→ $\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} = \gamma mc^2 \equiv E \equiv$ "Total" Relativistic Energy

→ $mc^2 \equiv E_0 \equiv$ "Rest" Energy (พลังงานนิ่ง) [พลังงานเชิงสัมพัทธภาพรวม เมื่อวัตถุอยู่นิ่ง]

→ $K = E - E_0 =$ พลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพ (Relativistic Kinetic Energy)

(iv) จาก $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ จะได้ $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$



(v) Speed Limit:

ถ้า $u = c$ จะได้ว่า $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} = \infty$

→ ต้องใช้ "พลังงาน" ปริมาณ "อนันต์" ในการทำให้ อนุภาคมีอัตราเร็วเท่ากับ "c"

ถ้า $u > c$ จะได้ว่า "E" จะเป็น "จำนวนจินตภาพ (imaginary number)"

→ "ไม่มี Physical Meaning"

(vi) Classical Limit: ถ้า $u \ll c$ จะได้ $\dfrac{u}{c} \ll 1$ และดังนั้น

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 = mc^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} - mc^2$$

$$K \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) - mc^2 = \frac{1}{2} mu^2$$

(vii) Zero-Mass Particle: สามารถมี "อนุภาค" ที่มี "มวล" เป็น "ศูนย์"ได้ โดยที่อนุภาคนั้น "ต้อง" เคลื่อนที่ด้วย "อัตราเร็ว" เท่ากับ "อัตราเร็วของแสง"

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \rightarrow$$

ถ้า $u = c$ "ตัวหาร" จะเป็น "ศูนย์"

"E" จะเป็น "∞" ยกเว้น " $m = 0$"

จาก $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ $\rightarrow$ สำหรับ "อนุภาค" ที่มี "มวลเป็นศูนย์" $E = pc$

$\rightarrow$ "Photon" เป็น "อนุภาค" ของ "แสง" $\rightarrow$ เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว "c" และมี "มวล" เป็น "ศูนย์"

Appendix A: Verification of Relativistic Momentum Formula

พิจารณา “การทดลองในความคิด (Thought Experiment)” ดังนี้

→ S′ frame (i) อยู่ที่ระดับ “สูงกว่า” S frame และ (ii) เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ $\vec{\boldsymbol{V}} = V\hat{\boldsymbol{e}}_x$ เทียบกับ S frame

→ ผู้สังเกต A (S frame) “โยน” ลูกบอลหมายเลข ① “ขึ้น” ในแนวดิ่ง ด้วย “อัตราเร็ว ε” เทียบกับ A เอง → $u_{1x} = 0$ และ $u_{1y} = \varepsilon$

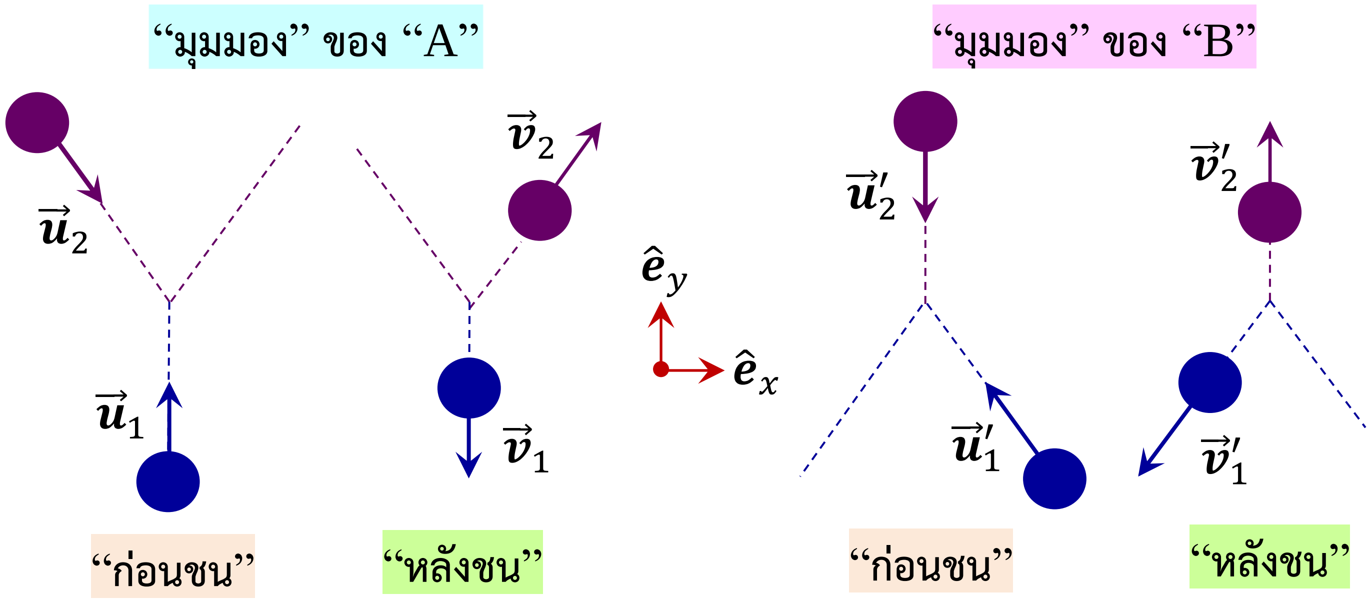
→ ผู้สังเกต B (S′ frame) “ปา” ลูกบอลหมายเลข ② “ลง” ในแนวดิ่ง ด้วย “อัตราเร็ว ε” เทียบกับ B เอง → $u'_{2x} = 0$ และ $u'_{2y} = -\varepsilon$

→ ลูกบอลทั้งสองมี “มวล m เท่ากัน” ชนกันแบบ “ยืดหยุ่นสมบูรณ์” โดย “ไม่มีแรงภายนอกอื่นๆ กระทำ”

→ หลังการชน ผู้สังเกต A จะเห็น ลูกบอลหมายเลข ① เคลื่อนที่ “ย้อยกลับเส้นทางเดิม” (ตกลงมาในแนวดิ่ง) ด้วย “อัตราเร็ว ε” (เท่าเดิม) → $v_{1x} = 0$ และ $v_{1y} = -\varepsilon$

→ หลังการชน ผู้สังเกต B จะเห็น ลูกบอลหมายเลข ② เคลื่อนที่ “ย้อยกลับเส้นทางเดิม” (สะท้อนขึ้นในแนวดิ่ง) ด้วย “อัตราเร็ว ε” (เท่าเดิม) → $v'_{2x} = 0$ และ $v'_{2y} = \varepsilon$

→ “ภาพ” ของ “การชน” ในมุมมองของ “A” และ “B” จะเป็นดังรูป



→ วิเคราะห์ "การชน" ใน "มุมมอง" ของ "ผู้สังเกต A" → ต้องหา $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2$ และ $\vec{\boldsymbol{v}}_2$

เรารู้ $$\vec{\boldsymbol{u}}_1 = u_{1x}\hat{\boldsymbol{e}}_x + u_{1y}\hat{\boldsymbol{e}}_y = \varepsilon\hat{\boldsymbol{e}}_y$$ (โยน "ขึ้น" ไป)

และ $$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = v_{1x}\hat{\boldsymbol{e}}_x + v_{1y}\hat{\boldsymbol{e}}_y = -\varepsilon\hat{\boldsymbol{e}}_y$$ (ตก "ลง" มา)

ต้องหา $$\vec{\boldsymbol{u}}_2 = u_{2x}\hat{\boldsymbol{e}}_x + u_{2y}\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

และ $$\vec{\boldsymbol{v}}_2 = v_{2x}\hat{\boldsymbol{e}}_x + v_{2y}\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

เรารู้ $$\vec{\boldsymbol{u}}_2' = u_{2x}'\hat{\boldsymbol{e}}_x + u_{2y}'\hat{\boldsymbol{e}}_y = -\varepsilon\hat{\boldsymbol{e}}_y$$ (ปา "ลง" มา)

และ $$\vec{\boldsymbol{v}}_2' = v_{2x}'\hat{\boldsymbol{e}}_x + v_{2y}'\hat{\boldsymbol{e}}_y = \varepsilon\hat{\boldsymbol{e}}_y$$ (สะท้อน "ขึ้น")

ดังนั้น สามารถใช้ "inverse" velocity transformation หา $\vec{\boldsymbol{u}}_2$ และ $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ ได้

$$u_{2x} = \frac{u'_{2x} + V}{1 + \frac{V u'_{2x}}{c^2}} \rightarrow \ u_{2x} = \frac{0 + V}{1 + 0} = V$$

$$u_{2y} = \frac{u'_{2y}}{\gamma\left(1 + \frac{V u'_{2x}}{c^2}\right)} \rightarrow u_{2y} = \frac{-\varepsilon}{\gamma(1+0)} = -\frac{\varepsilon}{\gamma} \ \text{เมื่อ} \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}_2 = u_{2x}\hat{\boldsymbol{e}}_x + u_{2y}\hat{\boldsymbol{e}}_y = V\hat{\boldsymbol{e}}_x - \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

$$v_{2x} = \frac{v'_{2x} + V}{1 + \frac{V v'_{2x}}{c^2}} \rightarrow \ v_{2x} = \frac{0 + V}{1 + 0} = V$$

$$v_{2y} = \frac{v'_{2y}}{\gamma\left(1 + \frac{V v'_{2x}}{c^2}\right)} \rightarrow v_{2y} = \frac{\varepsilon}{\gamma(1+0)} = +\frac{\varepsilon}{\gamma} \ \text{เมื่อ} \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}_2 = v_{2x}\hat{\boldsymbol{e}}_x + v_{2y}\hat{\boldsymbol{e}}_y = V\hat{\boldsymbol{e}}_x + \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

	"ก่อนการชน"	"หลังการชน"
ลูกบอลหมายเลข ①	$\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \varepsilon\hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = -\varepsilon\hat{\boldsymbol{e}}_y$
ลูกบอลหมายเลข ②	$\vec{\boldsymbol{u}}_2 = V\hat{\boldsymbol{e}}_x - \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{v}}_2 = V\hat{\boldsymbol{e}}_x + \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y$

$u_1 = |\vec{\boldsymbol{u}}_1| = \varepsilon = |\vec{\boldsymbol{v}}_1| = v_1$ & $u_2 = |\vec{\boldsymbol{u}}_2| = \sqrt{V^2 + \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}} = |\vec{\boldsymbol{v}}_2| = v_2$

ถ้าใช้ "Classical" Definition ของ "(Linear) Momentum", $\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{u}}$, จะได้

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{before} = m\vec{\boldsymbol{u}}_1 + m\vec{\boldsymbol{u}}_2 = mV\hat{\boldsymbol{e}}_x + m\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{after} = m\vec{\boldsymbol{v}}_1 + m\vec{\boldsymbol{v}}_2 = mV\hat{\boldsymbol{e}}_x - m\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y \neq \vec{\boldsymbol{p}}_{before}$$

$\rightarrow$ "ไม่เป็น" ไปตาม "Conservation of (Linear) Momentum"

ถ้าใช้ "Relativistic" Definition ของ "(Linear) Momentum",

$$\vec{\boldsymbol{p}} \equiv \frac{m\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

จะได้ $$\vec{\boldsymbol{p}}_{before} = \vec{\boldsymbol{p}}_{after}$$

→ "เป็น" ไปตาม "Conservation of (Linear) Momentum"

$$\left(\vec{\boldsymbol{p}}_{before}\right)_x = \frac{mu_{1x}}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{mu_{2x}}{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}} = 0 + \frac{mV}{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}} = \left(\vec{\boldsymbol{p}}_{after}\right)_x$$

(ระลึกว่า $u_2 = v_2$)

$$\left(\vec{\boldsymbol{p}}_{before}\right)_y = 0 = \left(\vec{\boldsymbol{p}}_{after}\right)_y$$

$$\left(\vec{\boldsymbol{p}}_{before}\right)_y = \frac{mu_{1y}}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{mu_{2y}}{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}}$$

$$\left(\vec{\boldsymbol{p}}_{before}\right)_y = \frac{m\varepsilon}{\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{c^2}}} + \frac{m\left[-\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\right]}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(V^2+\frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}\right)}}$$

$$\left(\vec{\boldsymbol{p}}_{before}\right)_y = \frac{m\varepsilon}{\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{c^2}}} - \frac{m\varepsilon\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}-\frac{\varepsilon^2}{c^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}}$$

$$\left(\vec{\boldsymbol{p}}_{before}\right)_y = \frac{m\varepsilon}{\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{c^2}}} - \frac{m\varepsilon\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}} = 0$$

Appendix B: การพิสูจน์ว่า

$$\boxed{K = \int_0^u u dp = \int_0^p \frac{cpdp}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}}$$

จาก "นิยาม" ของ "Relativistic (Linear) Momentum" (สำหรับ "หนึ่ง" มิติ)

$$p \equiv \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

จะได้

$$p^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = m^2u^2$$

$$\rightarrow \quad p^2(c^2 - u^2) = m^2c^2u^2 \quad \rightarrow \quad c^2p^2 = (p^2 + m^2c^2)u^2 \quad \rightarrow$$

$$u = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}$$

Appendix C: การพิสูจน์ว่า

$$\boxed{K = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2}$$

(ในเทอมของ p) (ในเทอมของ u) (ในเทอมของ γ)

จาก

$$K = \int_0^u u\,dp = \int_0^p \frac{cp\,dp}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}$$

"integrate" โดยการ "เปลี่ยนตัวแปร": ให้ $w = p^2 + m^2c^2 \rightarrow dw = 2p\,dp$

"integration limits": $p = 0 \rightarrow w = m^2c^2$ และ $p = p \rightarrow w = p^2 + m^2c^2$

จะได้

$$K = \int_0^p \frac{cp\,dp}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}} = \frac{c}{2}\int_{m^2c^2}^{p^2+m^2c^2} \frac{dw}{\sqrt{w}} = \frac{c}{2}\left[2\sqrt{w}\right]_{m^2c^2}^{p^2+m^2c^2}$$

$$\rightarrow \quad K = c\left(\sqrt{p^2 + m^2c^2} - \sqrt{m^2c^2}\right) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$$

ในเทอมของ “u” : จาก $$p \equiv \frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$ จะได้

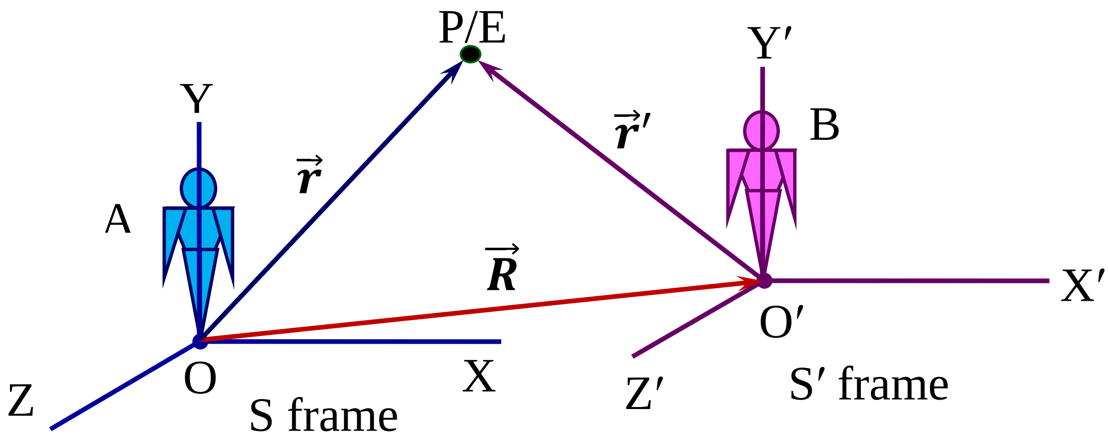
$$p^2c^2 + m^2c^4 = \frac{m^2u^2c^2}{1-u^2/c^2} + m^2c^4 = \frac{m^2u^2c^2 + m^2c^4 - m^2u^2c^2}{1-u^2/c^2}$$

$$p^2c^2 + m^2c^4 = \frac{m^2c^4}{1-u^2/c^2}$$

$$\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$K = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - mc^2$$

Appendix D: “Lorentz” ↔ “Inverse Lorentz” Transformation



$$x' = \gamma(x - Vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)$$

“Lorentz” Transformation

↔

$$x = \gamma(x' + Vt')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right)$$

“Inverse Lorentz” Transformation

จาก $x' = \gamma(x - Vt)$ จะได้ $x = \dfrac{x'}{\gamma} + Vt$ แทนลงใน $t' = \gamma\left(t - \dfrac{Vx}{c^2}\right)$ จะได้

$$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) = \gamma\left[t - \frac{V}{c^2}\left(\frac{x'}{\gamma} + Vt\right)\right] = \gamma t - \frac{Vx'}{c^2} - \gamma t\frac{V^2}{c^2}$$

$$t' = \gamma t\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - \frac{Vx'}{c^2} = \frac{t}{\gamma} - \frac{Vx'}{c^2}$$

$$\downarrow$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right)$$

$$\left\{ \gamma\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \right\}$$

แทน $t = \gamma\left(t' + \dfrac{Vx'}{c^2}\right)$ ลงใน $x = \dfrac{x'}{\gamma} + Vt$ จะได้

$$x = \frac{x'}{\gamma} + Vt = \frac{x'}{\gamma} + V\gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right) = \frac{x'}{\gamma} + V\gamma t' + \gamma x'\frac{V^2}{c^2}$$

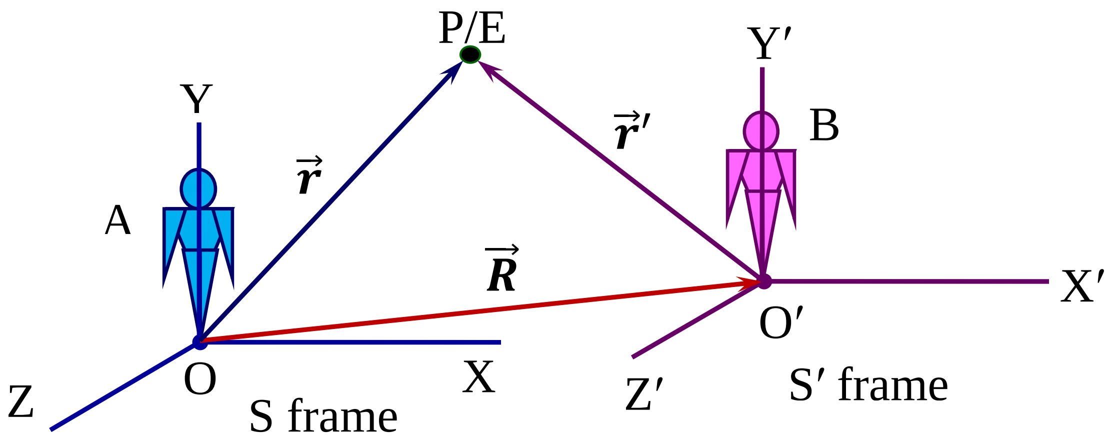
$$x = \gamma x'\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{V^2}{c^2}\right) + V\gamma t' = \gamma x' + V\gamma t'$$

$$\downarrow$$

$$x = \gamma(x' + Vt')$$

$$\left\{ \frac{1}{\gamma^2} + \frac{V^2}{c^2} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + \frac{V^2}{c^2} = 1 \right\}$$

สรุป (ทฤษฎี) สัมพัทธภาพพิเศษ (Special Relativity)



$$x' = \gamma(x - Vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)$$

$$\leftrightarrow$$

$$x = \gamma(x' + Vt')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right)$$

"Lorentz" Transformation

"Inverse" Lorentz Transformation

“ผลสืบเนื่อง” จาก “Lorentz Transformation”

(i) “ระยะทาง” และ “ช่วงเวลา” ระหว่าง “เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์”

จาก $\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t)$ และ $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right)$ จะได้ว่า

“เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์” ที่ “เกิดขึ้นที่ตำแหน่งเดียวกัน” ใน “กรอบอ้างอิงเฉื่อยกรอบหนึ่ง”
จะ “เกิดขึ้นที่คนละตำแหน่ง” ใน “กรอบอ้างอิงเฉื่อยอื่นๆ”
ยกเว้นกรณีที่ “เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์” นั้น “เกิดขึ้นพร้อมกัน” ด้วย

$\Delta x = 0 \;\nRightarrow\; \Delta x' = 0$ ยกเว้นกรณีที่ $\Delta t = 0$ ด้วย

“เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์” ที่ “เกิดขึ้นพร้อมกัน” ใน “กรอบอ้างอิงเฉื่อยกรอบหนึ่ง”
จะเกิดขึ้น “ไม่พร้อมกัน” ใน “กรอบอ้างอิงเฉื่อยอื่นๆ”
ยกเว้นกรณีที่ “เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์” นั้น “เกิดขึ้นที่ตำแหน่งเดียวกัน” ด้วย

$\Delta t = 0 \;\nRightarrow\; \Delta t' = 0$ ยกเว้นกรณีที่ $\Delta x = 0$ ด้วย

$\rightarrow$ “สัมพัทธภาพ” ของ “การเกิดขึ้นพร้อมกัน” (Relativity of Simultaneity)

(ii) การ “ยืด (ออก)” ของ “ช่วงเวลา” (Time Dilation)

“proper” time interval (ช่วงเวลา“มาตรฐาน”) ระหว่าง “เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์” (Δt_0)
$\equiv$ “ช่วงเวลา” ระหว่าง “เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์” ที่วัด (โดยผู้สังเกตที่อยู่) ใน กรอบอ้างอิงที่เหตุการณ์ทั้งสอง“เกิดขึ้นที่ตำแหน่งเดียวกัน”(วัดโดยผู้สังเกตที่“อยู่นิ่งเทียบกับเหตุการณ์” $\rightarrow$ สามารถใช้ “นาฬิกาเรือนเดียว” ในการจับเวลา)

$\rightarrow$

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \Delta t_0$$

เมื่อ $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ = “Lorentz” หรือ “relativistic” factor และ $\beta \equiv \dfrac{V}{c}$

เนื่องจาก $\gamma \geq 1$ เสมอ ดังนั้น จะได้ว่า $\Delta t \geq \Delta t_0$ นั่นคือ

“proper” time interval (Δt_0)
จะเป็น “ช่วงเวลา” ที่ “สั้นที่สุด” ระหว่าง “2 เหตุการณ์”
วัดโดยผู้สังเกตที่“อยู่นิ่งเทียบกับทั้ง 2 เหตุการณ์”
(อยู่ในกรอบอ้างอิงที่เหตุการณ์ทั้งสอง “เกิดขึ้นที่ตำแหน่งเดียวกัน”)

(iii) การ "หด (สั้น)" ของ "ความยาว" (Length Contraction)

"proper" length (ความยาว "มาตรฐาน") ของ "วัตถุ" (L_0)

≡ "ความยาว" ของ "วัตถุ" ที่วัด (โดยผู้สังเกตที่อยู่) ใน กรอบอ้างอิงที่วัตถุ "อยู่นิ่ง"
(วัดโดยผู้สังเกตที่ "อยู่นิ่งเทียบกับวัตถุ")

$L_0 = \gamma L$ หรือ $L = L_0/\gamma$

เนื่องจาก $\gamma \geq 1$ ดังนั้น $L \leq L_0$

→ "proper" length (L_0) จะเป็น "ความยาว" ที่ "มากที่สุด" ของวัตถุ
(วัดโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่งเทียบกับวัตถุ)

(iv) การแปลงความเร็ว (Velocity Transformation)

"Special" $\rightarrow$ $$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{Vu_x}{c^2}\right)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{Vu_x}{c^2}\right)}$$

"Galilean" $\rightarrow$ $$u'_x = u_x - V \qquad u'_y = u_y \qquad u'_z = u_z$$

ปรากฏการณ์ "ดอปเพลอร์" เชิงสัมพัทธภาพ (Relativistic Doppler Effect)

"แหล่งกำเนิดแสง" กับ "ผู้สังเกต" เคลื่อนที่ "เข้าหากัน"

$$f_R = \left(\sqrt{\frac{c+V}{c-V}}\right) f_S$$

(เข้าหา $\rightarrow \lambda$ ลด $\rightarrow f$ เพิ่ม)

"แหล่งกำเนิดแสง" กับ "ผู้สังเกต" เคลื่อนที่ "ออกจากกัน"

$$f_R = \left(\sqrt{\frac{c-V}{c+V}}\right) f_S$$

โมเมนตัม (เชิงเส้น) เชิงสัมพัทธภาพ [Relativistic (Linear) Momentum]

→ เพื่อที่จะให้ "Conservation of (Linear) Momentum: $\sum \vec{\boldsymbol{p}}_{\text{before}} = \sum \vec{\boldsymbol{p}}_{after}$" ยังคง "เป็นจริง" ใน "Special Relativity" จำเป็นต้อง ให้ "นิยาม" ของ "(Linear) Momentum" ใหม่

วัตถุที่มี "มวล m" และกำลัง "เคลื่อนที่" โดยมี "ความเร็ว $\vec{\boldsymbol{u}}$" จะมี "โมเมนตัม (เชิงเส้น) เชิงสัมพัทธภาพ [Relativistic (Linear) Momentum], $\vec{\boldsymbol{p}}$"

$$\vec{\boldsymbol{p}} \equiv \frac{m\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \equiv \gamma m\vec{\boldsymbol{u}}$$

("นิยามเดิม" ใน "Classical Mechanics" คือ $\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{u}}$)

พลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพ (Relativistic Kinetic Energy, K), พลังงานเชิงสัมพัทธภาพรวม (Total Relativistic Energy, E) และ พลังงานนิ่ง (Rest Energy, E_0)

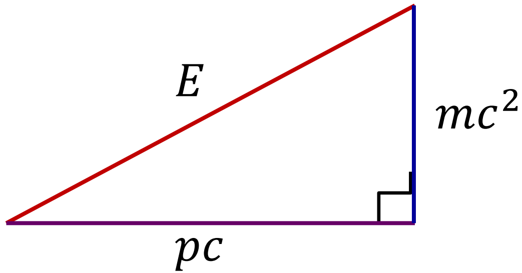
$$\boxed{K = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2}$$

→ $\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} = \gamma mc^2 \equiv E \equiv$ "Total" Relativistic Energy

→ $mc^2 \equiv E_0 \equiv$ "Rest" Energy (พลังงานนิ่ง) [พลังงานเชิงสัมพัทธภาพรวม เมื่อวัตถุอยู่นิ่ง]

→ $K = E - E_0 =$ พลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพ (Relativistic Kinetic Energy)

จาก $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ จะได้ $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$



Speed Limit :

ถ้า $u = c$ จะได้ว่า $$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} = \infty$$

→ ต้องใช้ "พลังงาน" ปริมาณ "อนันต์" ในการทำให้ อนุภาคมีอัตราเร็วเท่ากับ "c"

ถ้า $u > c$ จะได้ว่า "E" จะเป็น "จำนวนจินตภาพ (imaginary number)"

→ "ไม่มี Physical Meaning"

Classical Limit : ถ้า $u \ll c$ จะได้ $\frac{u}{c} \ll 1$ และดังนั้น

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 = mc^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} - mc^2$$

$$K \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) - mc^2 = \frac{1}{2}mu^2$$

Zero-Mass Particle: สามารถมี "อนุภาค" ที่มี "มวล" เป็น "ศูนย์"ได้ โดยที่อนุภาคนั้น "ต้อง" เคลื่อนที่ด้วย "อัตราเร็ว" เท่ากับ "อัตราเร็วของแสง"

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$

$\rightarrow$ ถ้า $u = c$ "ตัวหาร" จะเป็น "ศูนย์"

"E" จะเป็น "∞" ยกเว้น " $m = 0$"

จาก $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ $\rightarrow$ สำหรับ "อนุภาค" ที่มี "มวลเป็นศูนย์" $E = pc$

$\rightarrow$ "Photon" เป็น "อนุภาค" ของ "แสง" $\rightarrow$ เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว "c" และมี "มวล" เป็น "ศูนย์"

แบบฝึกหัด "ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ"

1. บอลลูกหนึ่งถูกขว้างด้วยอัตราเร็ว $20\ \mathrm{m/s}$ ภายในโบกี้รถไฟซึ่งกำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว $40\ \mathrm{m/s}$ จงหาอัตราเร็วของลูกบอลเทียบกับพื้นดิน เมื่อ
   (ก) ลูกบอลถูกขว้างไปข้างหน้า (ทิศเดียวกับทิศที่รถไฟวิ่ง) [$60\ \mathrm{m/s}$]
   (ข) ลูกบอลถูกขว้างไปข้างหลัง (ตรงข้ามกับทิศที่รถไฟเคลื่อนที่) [$20\ \mathrm{m/s}$]
   (ค) ลูกบอลถูกขว้างออกมาทางด้านข้างของโบกี้รถไฟ [$44.7\ \mathrm{m/s}$]

พื้นดิน = "S frame"

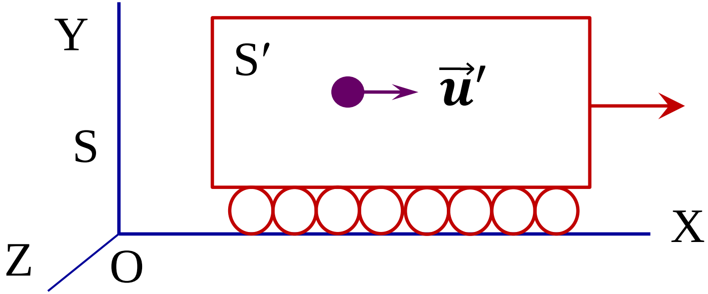
รถไฟ = "S′ frame" และ $\vec{\boldsymbol{V}} = V\hat{\boldsymbol{e}}_x = (40\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{e}}_x$

ลูกบอล = "วัตถุ" และ $u' = 20\ \mathrm{m/s}$

เนื่องจาก $V \ll c$ ดังนั้น สามารถ ใช้ Galilean Relativity ได้

$$\left\{ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (40/3 \times 10^8)^2}} = 1 \right\}$$

(ก) ลูกบอลถูกขว้างไปข้างหน้า (ทิศเดียวกับทิศที่รถไฟวิ่ง) [60 m/s]



$$\vec{V} = V\hat{e}_x = (40\ \mathrm{m/s})\hat{e}_x$$

$$\vec{u}' = (20\ \mathrm{m/s})\hat{e}_x$$

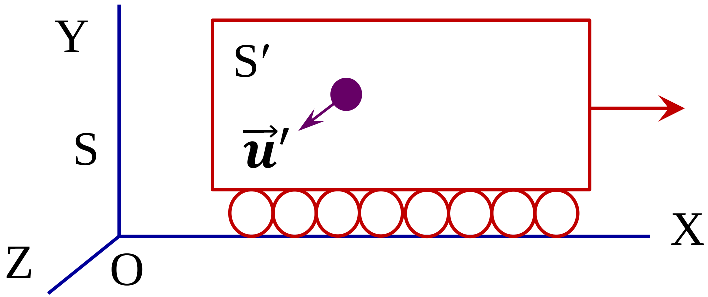
$\rightarrow$ ความเร็วของลูกบอลเทียบกับพื้นดิน: $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{V} = (60\ \mathrm{m/s})\hat{e}_x$

(ข) ลูกบอลถูกขว้างไปข้างหลัง (ตรงข้ามกับทิศที่รถไฟเคลื่อนที่) [20 m/s]

$$\vec{u}' = -(20\ \mathrm{m/s})\hat{e}_x$$

$\rightarrow$ ความเร็วของลูกบอลเทียบกับพื้นดิน: $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{V} = (20\ \mathrm{m/s})\hat{e}_x$

(ค) ลูกบอลถูกขว้างออกมาทางด้านข้างของโบกี้รถไฟ [44.7 m/s]



$$\vec{V} = V\hat{e}_x = (40\ \mathrm{m/s})\hat{e}_x$$

$$\vec{u}' = (20\ \mathrm{m/s})\hat{e}_z$$

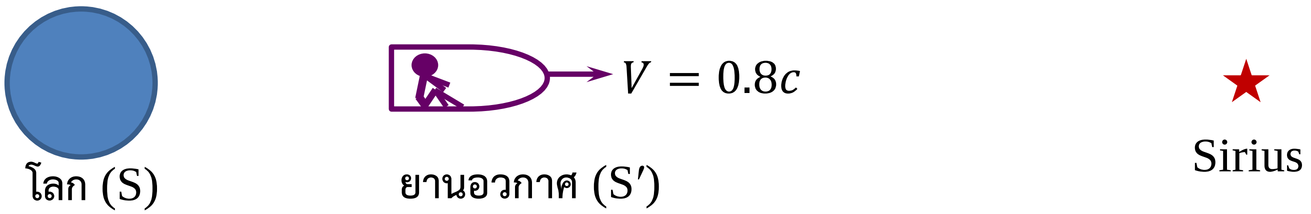
→ "ความเร็ว" ของลูกบอลเทียบกับพื้นดิน:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{V} = (40\ \mathrm{m/s})\hat{e}_x + (20\ \mathrm{m/s})\hat{e}_z$$

→ "อัตราเร็ว" ของลูกบอลเทียบกับพื้นดิน:

$$u = \sqrt{(40\ \mathrm{m/s})^2 + (20\ \mathrm{m/s})^2} = 44.7\ \mathrm{m/s}$$

2. นักบินอวกาศคนหนึ่งถูกส่งไปดาว Sirius โดยในระหว่างการเดินทางตลอดระยะทาง 8 ปีแสง จากโลกไปดาว Sirius นักบินอวกาศผู้นี้ถูกทำให้นอนหลับ เมื่อถึงดาว Sirius นักบินอวกาศจับเวลาได้ว่า เขาใช้เวลาเดินทาง 6 ปี ถ้าจรวดที่ใช้มีความเร็วในการเดินทางคงที่คือ $0.8c$ นักศึกษาอธิบายได้หรือไม่ว่า ทำไมนักบินอวกาศจึงจับเวลาในการเดินทางเพียง 6 ปี



"ระยะทาง" วัดโดย "ผู้สังเกตบนโลก" จะเป็น "proper" distance $(d_0) = 8$ ปีแสง

"อัตราเร็ว" ของ "จรวด" วัดโดยผู้สังเกตบนโลก $= 0.8c$

"ช่วงเวลาของการเดินทาง" วัดโดย "ผู้สังเกตบนโลก" $= \Delta t$:

$$\Delta t = \frac{distance}{speed} = \frac{8c}{0.8c} \text{ ปี} = 10 \text{ ปี}$$

“Lorentz” factor หรือ “relativistic” factor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.64}} = \frac{1}{\sqrt{0.36}} = \frac{1}{0.6} = \frac{5}{3}$$

“ช่วงเวลาของการเดินทาง” วัดโดย “นักบินอวกาศ” จะเป็น “proper” time interval (ซึ่งเป็น “ช่วงเวลา” ที่ “สั้นที่สุด” ระหว่าง “2 เหตุการณ์”)

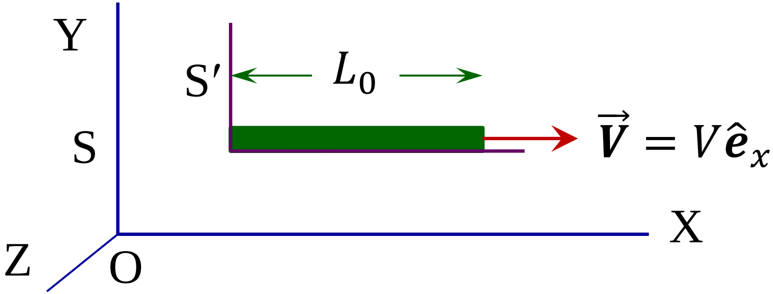
$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = (10 \text{ ปี}) \left(\frac{3}{5}\right) = 6 \text{ ปี}$$

“ระยะทาง” วัดโดย “นักบินอวกาศ” (d):

$$d = \frac{d_0}{\gamma} = (8 \text{ ปีแสง}) \left(\frac{3}{5}\right) = 4.8 \text{ ปีแสง}$$

“อัตราเร็ว” ของ “จรวด” วัดโดย “นักบินอวกาศ” $= \dfrac{d}{\Delta t_0} = \dfrac{4.8c \text{ ปี}}{6 \text{ ปี}} = 0.8c$

3. จงหาความเร็วของไม้เมตรซึ่งกำลังเคลื่อนที่ โดยผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงหนึ่งสังเกตว่าเห็นว่าไม้เมตรอันนี้มีความยาวลดลงเหลือเพียงครึ่งหนึ่ง $[0.866c]$

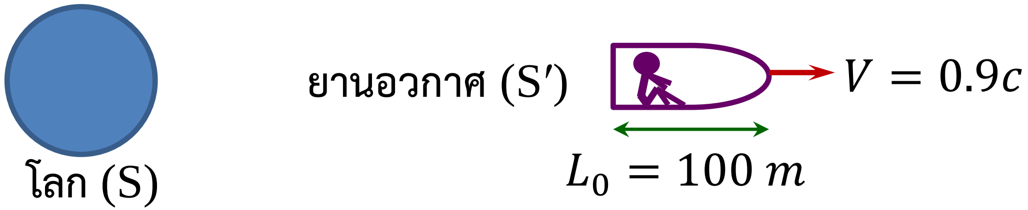


$$L = \frac{L_0}{\gamma} \rightarrow 0.5\text{ m} = \frac{1\text{ m}}{\gamma} \rightarrow \gamma = 2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \beta^2 = \frac{3}{4} \rightarrow \beta = \frac{V}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \text{V} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)c = \left(\frac{1.732}{2}\right)c = 0.866c$$

4. ยานอวกาศลำหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $0.9c$ ถ้าเดิมยานลำนี้ยาว 100 m เมื่อวัดจากภายในของยาน จงหาว่ายานลำนี้จะยาวเท่าใดเมื่อทำการวัดโดยผู้สังเกตซึ่งอยู่บนพื้นโลก [43.6 m]



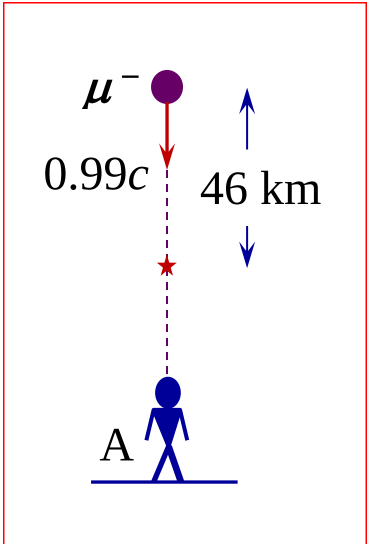
$$\beta = \frac{V}{c} = 0.9 \rightarrow 1 - \beta^2 = 0.19 \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.19}}$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = (100\ \mathrm{m})\left(\sqrt{0.19}\right) = (100)(0.436)\mathrm{m} = 43.6\ \mathrm{m}$$

5. อนุภาค muon เกิดขึ้นในชั้นบรรยากาศโลกที่อยู่สูงมากๆ ถ้าอนุภาคดังกล่าวเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $0.99c$ เป็นระยะทาง 46 km จะสลายตัวเป็น อิเล็กตรอน (e^-) นิวตริโน (ν) และ แอนตีนิวตริโน $(\bar{\nu})$ ตามสมการ $\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$

(ก) ระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ได้ เมื่อวัดจากกรอบอ้างอิงของตัวมันเอง [6.49 km]

(ข) ช่วงชีวิตของมันจะนานเท่าใด เมื่อวัดจากกรอบอ้างอิงของตัวมันเอง [21.8 μs]



"ระยะทาง" ที่ μ^- เคลื่อนที่ได้เมื่อวัดโดย "A" = "proper" distance

$$d_0 = 46 \text{ km}$$

Lorentz factor:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.99)^2}} = 7.09$$

"ช่วงชีวิต" ของ μ^- เมื่อวัดโดย "A" ≠ "proper" lifetime

$$\tau = \frac{d_0}{V} = \frac{46 \text{ km}}{0.99c} = \frac{46 \times 10^3 \text{ m}}{0.99 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 154.9\ \mu s$$

(ก) “ระยะทาง” ที่ μ^- เคลื่อนที่ได้ เมื่อวัดจาก “กรอบอ้างอิงของตัวมันเอง” (สั้นกว่า d_0)

$$d = \frac{d_0}{\gamma} = \frac{46 \text{ km}}{7.09} = 6.49 \text{ km}$$

(ข) “ช่วงชีวิต” ของ μ^- เมื่อวัดจาก “กรอบอ้างอิงของตัวมันเอง” จะเป็น “proper” lifetime (สั้นที่สุด)

$$\tau_0 = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{154.9 \ \mu s}{7.09} = 21.8 \ \mu s$$

6. (ก) อนุภาคเมซอนมีมวลนิ่ง 135 MeV จงหาอัตราเร็วของเมซอนที่มีพลังงานจลน์ 13.5 GeV [0.99995c]

(ข) ช่วงชีวิตของเมซอนที่อยู่นิ่งเท่ากับ 2 μs จงหาช่วงชีวิตของเมซอนที่มีพลังงานจลน์ 13.5 GeV [202 μs]

(ก) มี "มวลนิ่ง" 135 MeV → มี "พลังงานนิ่ง (rest energy)" $E_0 = mc^2 = 135\ \mathrm{MeV}$

[135 MeV $= 135 \times 10^6\ \mathrm{eV} = (135 \times 10^6) \times (1.6 \times 10^{-19})\ \mathrm{J}$}

$$\boxed{K = E - E_0 = \gamma E_0 - E_0} \rightarrow \boxed{\gamma = \frac{K + E_0}{E_0}}$$

$$\rightarrow \boxed{\gamma = \frac{13.5\ \mathrm{GeV} + 135\ \mathrm{MeV}}{135\ \mathrm{MeV}} = \frac{13500\ \mathrm{MeV} + 135\ \mathrm{MeV}}{135\ \mathrm{MeV}} = 101}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \rightarrow \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} = \frac{(\gamma+1)(\gamma-1)}{\gamma^2}$$

$$\rightarrow \beta = \frac{V}{c} = \frac{\sqrt{(\gamma+1)(\gamma-1)}}{\gamma} \rightarrow V = \left(\frac{\sqrt{(\gamma+1)(\gamma-1)}}{\gamma}\right)c$$

$$\gamma = 101 \rightarrow V = \left(\frac{\sqrt{(102)(100)}}{101}\right)c = 0.99995c$$

(ข)"ช่วงชีวิต" ของเมซอน "ที่อยู่นิ่ง" เท่ากับ 2 μs $\rightarrow \tau_0 = 2\ \mu\text{s}$

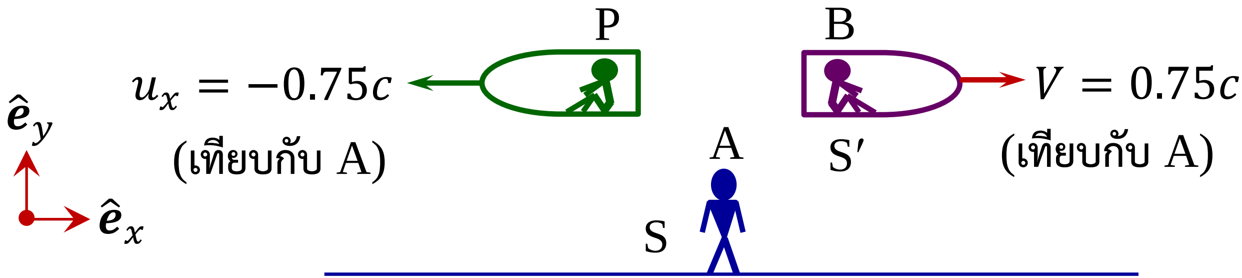
(เป็น "proper" lifetime ของเมซอน → สั้นที่สุด)

อนุภาคเมซอนที่มี "พลังงานจลน์ 13.5 GeV " จะมี $\gamma = 101$

"ช่วงชีวิต" ของเมซอนที่มีพลังงานจลน์ 13.5 GeV คือ

$$\tau = \gamma\tau_0 = (101)(2\ \mu\text{s}) = 202\ \mu\text{s}$$

7. ยานอวกาศสองลำบินออกจากจุดศูนย์กลางของกาแลกซีในทิศทางที่ตรงข้ามกัน ถ้ายานอวกาศทั้งสองเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว $0.75c$ เทียบกับจุดศูนย์กลางของกาแลกซี จงหาอัตราเร็วของยานอวกาศลำหนึ่งเมื่อเทียบกับอีกลำหนึ่ง [$0.96c$]



ใช้ “velocity transformation”

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{V u_x}{c^2}} \rightarrow u'_x = \frac{-0.75c - 0.75c}{1 - \frac{(0.75c)(-0.75c)}{c^2}} = -\frac{1.5c}{1.5625} = -0.96c$$

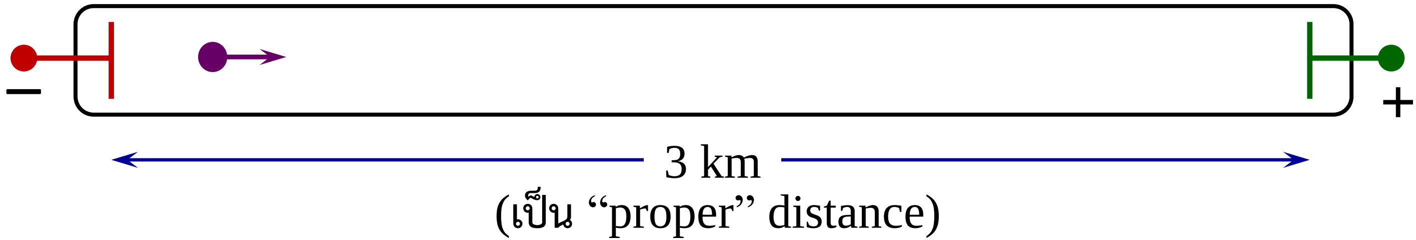
→ อัตราเร็วของยานอวกาศลำหนึ่งเมื่อเทียบกับอีกลำหนึ่ง คือ $0.96c$

8. อิเล็กตรอนถูกเร่งจากหยุดนิ่งจนมีพลังงานจลน์ $20\,\mathrm{GeV}$ โดยเครื่องเร่งอนุภาคที่มีระยะทางยาว $3\ \mathrm{km}$

(ก) จงหาค่า γ ของอิเล็กตรอนนี้ $[3.907 \times 10^4]$

(ข) จงหาอัตราเร็วของอิเล็กตรอนที่มีพลังงานจลน์ $20\ \mathrm{GeV}$ นี้ $[0.9999c]$

(ค) สำหรับผู้สังเกตซึ่งอยู่นิ่งเทียบกับ $20\ \mathrm{GeV}$ อิเล็กตรอน เขาจะวัดระยะทางของเครื่องเร่งอนุภาคได้เท่าไร $[0.0767\ \mathrm{m}]$



$$K = E - E_0 = \gamma E_0 - E_0 \rightarrow \gamma = \frac{K + E_0}{E_0}$$

$$E_0 = m_e c^2 = (9.1\times10^{-31}\text{ kg})(3\times10^{8}\text{ m/s})^2 = 8.19\times10^{-14}\text{ J}$$

$$E_0 = \frac{8.19\times10^{-14}\text{ J}}{1.6\times10^{-19}\text{ C}} = 0.512\text{ MeV}$$

(ก) $$\gamma = \frac{K+E_0}{E_0} = \frac{20\text{ GeV} + 0.512\text{ MeV}}{0.512\text{ MeV}} = \frac{20{,}000.512}{0.512} = 39{,}063.5$$

(ข) $$V = \left(\frac{\sqrt{(\gamma+1)(\gamma-1)}}{\gamma}\right)c = \left(\frac{\sqrt{(39{,}064.5)(39{,}062.5)}}{39{,}063.5}\right)c = 0.9999c$$

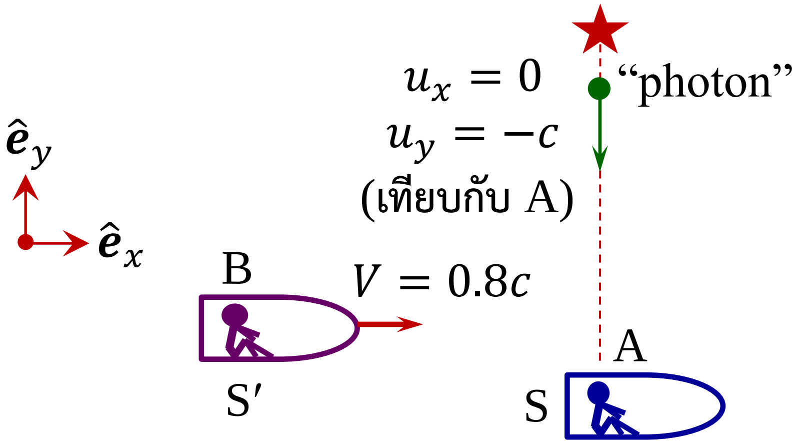
(ค) $$\text{Length Contraction} \rightarrow L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{3000\text{ m}}{39{,}063.5} = 0.0768\text{ m}$$

ถ้าใช้ค่าที่ละเอียดขึ้น $m_e = 9.109\times10^{-31}\text{ kg}$

$c = 2.998\times10^{8}\text{ m/s}$ และ $e = 1.602\times10^{-19}\text{ C}$

จะได้ $E_0 = 0.511\text{ MeV}$, $\gamma = 39{,}139.9$, $V = 0.9999c$ & $L = 0.0766\text{ m}$

9. นักบินอวกาศคนที่หนึ่ง อยู่นิ่งเมื่อเทียบกับกรอบอ้างอิง S เขามองเห็นแสงจากดาวฤกษ์อันไกลโพ้นดวงหนึ่งส่องตรงมายังตัวเขาในแนวแกน y (กรอบอ้างอิง S ประกอบไปด้วยแกน x และ y ซึ่งตั้งฉากกัน) ในขณะเดียวกัน นักบินอวกาศคนที่สองเคลื่อนที่ในแนวที่ขนานกับแกน x (ในกรอบอ้างอิง S) ด้วยอัตราเร็ว $0.8c$ จงหาว่านักบินอวกาศคนที่สองจะมองเห็นแสงส่องมายังเขาทำมุมเท่าใด $[36.9^\circ]$



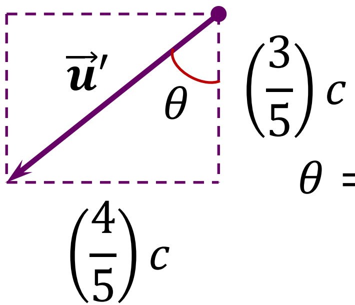
$$V = 0.8c \rightarrow \beta = 0.8 \rightarrow \sqrt{1-\beta^2} = 0.6 \rightarrow \gamma = 5/3$$

ใช้ “velocity transformation” จะได้

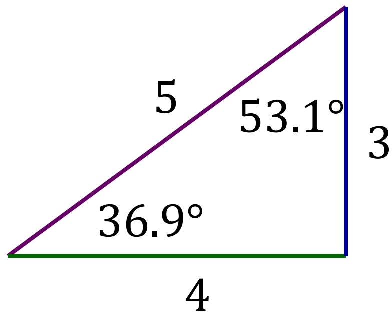
$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{V u_x}{c^2}} \rightarrow u'_x = \frac{0 - 0.8c}{1 - \frac{(0.8c)(0)}{c^2}} = -0.8c = -\left(\frac{4}{5}\right)c$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{V u_x}{c^2}\right)} \rightarrow u'_y = \frac{-c}{\frac{5}{3}\left(1 - \frac{(0.8c)(0)}{c^2}\right)} = -\left(\frac{3}{5}\right)c$$

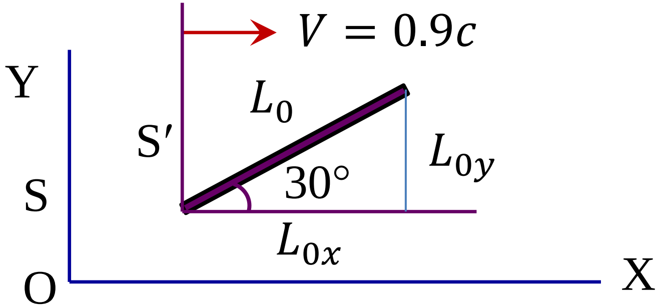
นักบินอวกาศคนที่สองจะมองเห็นแสงส่องมายังเขาทำมุม $\theta = 53.1°$ กับแกน y



$\theta = 53.1°$



10. ไม้เมตรอันหนึ่งวางทำมุม 30° กับแกนนอนในกรอบอ้างอิงซึ่งกำลังเคลื่อนที่ ถ้ากรอบอ้างอิงนี้เคลื่อนที่ในทิศทางที่แนวแกนของมันขนานกับแนวแกนนอนของกรอบอ้างอิงอีกอันหนึ่งซึ่งอยู่นิ่งด้วยอัตราเร็วสัมพัทธ์ $0.9c$ จงหาความยาวของไม้เมตรอันนี้เมื่อถูกวัดโดยผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงซึ่งอยู่นิ่ง [0.63 m]



$$V = 0.9c \;\rightarrow\; \beta = 0.9 \;\rightarrow\; \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{0.19} \;\rightarrow\; \gamma = 2.294$$

$$\left.\begin{aligned} L_x &= \frac{L_{0x}}{\gamma} = \frac{\cos(30°)}{2.294} = 0.378 \\ L_y &= L_{0y} = \sin(30°) = 0.500 \end{aligned}\right\} \rightarrow L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = 0.627\ \text{m}$$

11. พิจารณาการชนแบบยืดหยุ่นระหว่างทรงกลมสองก้อน (A และ B) ที่มีมวลเท่ากันเท่ากับ m เมื่อมองจากกรอบอ้างอิงนิ่ง พบว่ามีความเร็วดังนี้

	ความเร็วก่อนชน	ความเร็วหลังชน
A	$\vec{\boldsymbol{u}}_A = 0.4619c\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{v}}_A = -0.4619c\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$
B	$\vec{\boldsymbol{u}}_B = 0.500c\ \hat{\boldsymbol{e}}_x - 0.400c\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{v}}_B = 0.500c\ \hat{\boldsymbol{e}}_x + 0.400c\ \hat{\boldsymbol{e}}_y$

(ก) จงหาการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงสัมพัทธ์ของทรงกลมแต่ละก้อน และแสดงให้เห็นว่าโมเมนตัมอนุรักษ์สำหรับการชนนี้จากผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงนิ่ง

(ข) จงหาความเร็วของการชนทั้งสี่ค่า เมื่อสังเกตจากกรอบอ้างอิงซึ่งเคลื่อนที่ไปทางด้านขวามือด้วยความเร็ว $0.500c\ \hat{\boldsymbol{e}}_x$ พร้อมทั้งวาดรูปแสดงการชนของทรงกลมทั้งสองเมื่อสังเกตจากกรอบอ้างอิงนี้

(ค) ให้ใช้คำตอบที่ได้จาก (ข) คำนวณหาการเปลี่ยนแปลงของ relativistic momentum ทั้งหมดเนื่องจากการชนเมื่อสังเกตในกรอบอ้างอิงซึ่งกำลังเคลื่อนที่ พร้อมทั้งตอบคำถามว่า โมเมนตัมอนุรักษ์หรือไม่

“relativistic momentum” สำหรับอนุภาคที่มี “มวล m” เคลื่อนที่ด้วย “ความเร็ว $\vec{\boldsymbol{u}}$” คือ

$$\vec{\boldsymbol{p}} \equiv \frac{m\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \equiv \gamma_u m\vec{\boldsymbol{u}}$$

เมื่อ $u = |\vec{\boldsymbol{u}}| =$ “อัตราเร็ว” ของ “การเคลื่อนที่” ของ “อนุภาค”

“การแปลงความเร็ว (velocity transformation)” : ความสัมพันธ์ระหว่าง “ความเร็วของวัตถุ” ที่สังเกตโดย “ผู้สังเกต” ที่มี “ความเร็วสัมพัทธ์ (ระหว่างกัน)” เป็น $\vec{\boldsymbol{V}} = V\hat{\boldsymbol{e}}_x$ คือ

$$u_x' = \frac{u_x - V}{1-\frac{Vu_x}{c^2}} \;,\quad u_y' = \frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{Vu_x}{c^2}\right)} \quad \text{และ} \quad u_z' = \frac{u_z}{\gamma\left(1-\frac{Vu_x}{c^2}\right)}$$

เมื่อ
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

(ก) พิจารณาการชนใน "กรอบอ้างอิงนิ่ง"

สำหรับ "อนุภาค A" :

ความเร็วก่อนชน	ความเร็วหลังชน
$\vec{\boldsymbol{u}}_A = 0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{v}}_A = -0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

ดังนั้น $$u_A = |\vec{\boldsymbol{u}}_A| = 0.4619c = |\vec{\boldsymbol{v}}_A| = v_A$$

และ $$\gamma_{u_A} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_A^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.4619)^2}} = 1.1275 = \gamma_{v_A}$$

relativistic momentum ก่อนชน	relativistic momentum หลังชน
$\vec{\boldsymbol{p}}_A^b = \gamma_{u_A} m \vec{\boldsymbol{u}}_A$	$\vec{\boldsymbol{p}}_A^a = \gamma_{v_A} m \vec{\boldsymbol{v}}_A$
$\vec{\boldsymbol{p}}_A^b = (1.1275)(m)(0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y)$	$\vec{\boldsymbol{p}}_A^a = (1.1275)(m)(-0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y)$
$\vec{\boldsymbol{p}}_A^b = 0.5208mc\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{p}}_A^a = -0.5208mc\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

สำหรับ “อนุภาค B” :

ความเร็วก่อนชน	ความเร็วหลังชน
$\vec{\boldsymbol{u}}_B = 0.500c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x - 0.400c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{v}}_B = 0.500c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + 0.400c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

$$u_B = |\vec{\boldsymbol{u}}_B| = \left(\sqrt{(0.5)^2 + (0.4)^2}\right)c = 0.6403c = |\vec{\boldsymbol{v}}_B| = v_B$$

$$\gamma_{u_B} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_B^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.6403)^2}} = 1.3019 = \gamma_{v_B}$$

relativistic momentum ก่อนชน	relativistic momentum หลังชน
$\vec{\boldsymbol{p}}_B^b = \gamma_{u_B} m\vec{\boldsymbol{u}}_B$	$\vec{\boldsymbol{p}}_B^a = \gamma_{v_B} m\vec{\boldsymbol{v}}_B$
$\vec{\boldsymbol{p}}_B^b = 1.3019m(0.5c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x - 0.4c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y)$	$\vec{\boldsymbol{p}}_B^a = 1.3019m(0.5c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + 0.4c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y)$
$\vec{\boldsymbol{p}}_B^b = 0.6510mc\,\hat{\boldsymbol{e}}_x - 0.5208mc\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{p}}_B^a = 0.6510mc\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + 0.5208mc\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

$\rightarrow$ $$\vec{\boldsymbol{p}}^b = \vec{\boldsymbol{p}}_A^b + \vec{\boldsymbol{p}}_B^b = 0.6510mc\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \vec{\boldsymbol{p}}_A^a + \vec{\boldsymbol{p}}_B^a = \vec{\boldsymbol{p}}^a$$

(ข) พิจารณาการชนใน “กรอบอ้างอิงซึ่งกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $0.500c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$”

เรารู้ “ความเร็วของทรงกลมทั้งสองก้อน” ใน “กรอบอ้างอิงนิ่ง”

	ความเร็วก่อนชน	ความเร็วหลังชน
A	$\vec{\boldsymbol{u}}_A = 0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{v}}_A = -0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$
B	$\vec{\boldsymbol{u}}_B = 0.500c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x - 0.400c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{v}}_B = 0.500c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + 0.400c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

→ จะใช้ “การแปลงความเร็ว (velocity transformation)”

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}} \qquad \text{และ} \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{Vu_x}{c^2}\right)}$$

เมื่อ $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.75}} = 1.1547$$

เพื่อหา “ความเร็วของทรงกลมทั้งสองก้อน” ใน “กรอบอ้างอิงเคลื่อนที่”

สำหรับ “อนุภาค A” ซึ่งมีความเร็วก่อนชนและความเร็วหลังชนใน “กรอบอ้างอิงนิ่ง” เป็น

$$\vec{\boldsymbol{u}}_A = 0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \qquad \text{และ} \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_A = -0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

$$u'_{Ax} = \frac{u_{Ax} - V}{1 - \frac{Vu_{Ax}}{c^2}} = \frac{0 - 0.500c}{1 - \frac{(0.500c)(0)}{c^2}} = -0.500c$$

$$u'_{Ay} = \frac{u_{Ay}}{\gamma\left(1 - \frac{Vu_{Ax}}{c^2}\right)} = \frac{0.4619c}{1.1547\left(1 - \frac{(0.500c)(0)}{c^2}\right)} = 0.400c$$

$$v'_{Ax} = \frac{v_{Ax} - V}{1 - \frac{Vv_{Ax}}{c^2}} = \frac{0 - 0.500c}{1 - \frac{(0.500c)(0)}{c^2}} = -0.500c$$

$$v'_{Ay} = \frac{v_{Ay}}{\gamma\left(1 - \frac{Vv_{Ax}}{c^2}\right)} = \frac{-0.4619c}{1.1547\left(1 - \frac{(0.500c)(0)}{c^2}\right)} = -0.400c$$

$$\rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{u}}'_A = -0.500c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + 0.400c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \quad \text{และ} \quad \vec{\boldsymbol{v}}'_A = -0.500c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x - 0.400c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

สำหรับ “อนุภาค B” ซึ่งมีความเร็วก่อนชนและความเร็วหลังชนใน “กรอบอ้างอิงนิ่ง” เป็น

$\vec{\boldsymbol{u}}_B = 0.500c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x - 0.400c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$ และ $\vec{\boldsymbol{v}}_B = 0.500c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + 0.400c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

$$u'_{Bx} = \frac{u_{Bx} - V}{1 - \frac{V u_{Bx}}{c^2}} = \frac{0.500c - 0.500c}{1 - \frac{(0.500c)(0.500c)}{c^2}} = 0$$

$$u'_{By} = \frac{u_{By}}{\gamma\left(1 - \frac{V u_{Bx}}{c^2}\right)} = \frac{-0.400c}{1.1547\left(1 - \frac{(0.500c)(0.500c)}{c^2}\right)} = -0.4619c$$

$$v'_{Bx} = \frac{v_{Bx} - V}{1 - \frac{V v_{Bx}}{c^2}} = \frac{0.500c - 0.500c}{1 - \frac{(0.500c)(0.500c)}{c^2}} = 0$$

$$v'_{By} = \frac{v_{By}}{\gamma\left(1 - \frac{V v_{Bx}}{c^2}\right)} = \frac{0.400c}{1.1547\left(1 - \frac{(0.500c)(0.500c)}{c^2}\right)} = +0.4619c$$

$\rightarrow$ $\vec{\boldsymbol{u}}'_B = -0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$ และ $\vec{\boldsymbol{v}}'_B = +0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

“ความเร็วของทรงกลมทั้งสองก้อน” ใน “กรอบอ้างอิงเคลื่อนที่” คือ

	ความเร็วก่อนชนในกรอบอ้างอิงเคลื่อนที่	ความเร็วหลังชนในกรอบอ้างอิงเคลื่อนที่
A	$\vec{\boldsymbol{u}}'_A = -0.500c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + 0.400c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{v}}'_A = -0.500c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x - 0.400c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$
B	$\vec{\boldsymbol{u}}'_B = -0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{v}}'_B = +0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

“ภาพ” ของการชนของทรงกลมทั้งสอง เมื่อสังเกตจาก “กรอบอ้างอิงเคลื่อนที่” จะเป็นดังรูป

(ค) พิจารณาการชนใน “กรอบอ้างอิงเคลื่อนที่”

สำหรับ “อนุภาค A” :

ความเร็วก่อนชนในกรอบอ้างอิงเคลื่อนที่	ความเร็วหลังชนในกรอบอ้างอิงเคลื่อนที่
$\vec{\boldsymbol{u}}'_A = -0.500c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + 0.400c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{v}}'_A = -0.500c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x - 0.400c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

$$u'_A = |\vec{\boldsymbol{u}}'_A| = \left(\sqrt{(0.5)^2 + (0.4)^2}\right)c = 0.6403c = |\vec{\boldsymbol{v}}'_A| = v'_A$$

$$\gamma'_{u_A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_A}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.6403)^2}} = 1.3019 = \gamma'_{v_A}$$

relativistic momentum ก่อนชน	relativistic momentum หลังชน
$\vec{\boldsymbol{p}}'^b_A = \gamma'_{u_A} m \vec{\boldsymbol{u}}'_A$ $\vec{\boldsymbol{p}}'^b_A = 1.3019m(-0.5c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + 0.4c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y)$ $\vec{\boldsymbol{p}}'^b_A = -0.6510mc\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + 0.5208mc\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{p}}'^a_A = \gamma'_{v_A} m \vec{\boldsymbol{v}}'_A$ $\vec{\boldsymbol{p}}'^a_A = 1.3019m(-0.5c\,\hat{\boldsymbol{e}}_x - 0.4c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y)$ $\vec{\boldsymbol{p}}'^a_A = -0.6510mc\,\hat{\boldsymbol{e}}_x - 0.5208mc\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

สำหรับ “อนุภาค B” :

ความเร็วก่อนชนในกรอบอ้างอิงเคลื่อนที่	ความเร็วหลังชนในกรอบอ้างอิงเคลื่อนที่
$\vec{\boldsymbol{u}}'_B = -0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{v}}'_B = +0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

$$u'_B = |\vec{\boldsymbol{u}}'_B| = 0.4619c = |\vec{\boldsymbol{v}}'_B| = v'_B$$

$$\gamma'_{u_B} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2_B}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.4619)^2}} = 1.1275 = \gamma'_{v_B}$$

relativistic momentum ก่อนชน	relativistic momentum หลังชน
$\vec{\boldsymbol{p}}'^b_B = \gamma'_{u_B} m \vec{\boldsymbol{u}}'_B$ $\vec{\boldsymbol{p}}'^b_B = 1.1275m(-0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y)$ $\vec{\boldsymbol{p}}'^b_B = -0.5208mc\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$	$\vec{\boldsymbol{p}}'^a_B = \gamma'_{v_B} m \vec{\boldsymbol{v}}'_B$ $\vec{\boldsymbol{p}}'^a_B = 1.1275m(+0.4619c\,\hat{\boldsymbol{e}}_y)$ $\vec{\boldsymbol{p}}'^a_B = +0.5208mc\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$

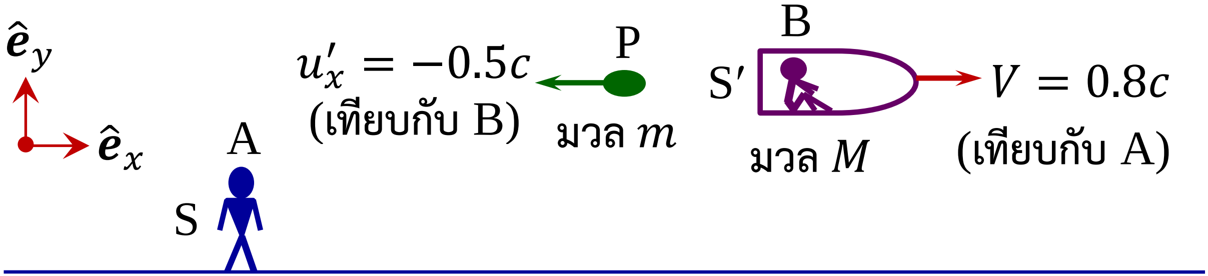
$\rightarrow$ $$\vec{\boldsymbol{p}}'^b = \vec{\boldsymbol{p}}'^b_A + \vec{\boldsymbol{p}}'^b_B = -0.6510mc\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \vec{\boldsymbol{p}}'^a_A + \vec{\boldsymbol{p}}'^a_B = \vec{\boldsymbol{p}}'^a$$

12. [F2551] A อยู่นิ่งในกรอบอ้างอิงเฉื่อยกรอบหนึ่ง พบว่า ยานอวกาศ B มวล M กำลังเคลื่อนที่ไปทางขวา (ในทิศบวก x) ด้วยอัตราเร็วคงตัว $0.8c$ ในขณะเดียวกัน ระเบิดมวล m ที่ถูกปล่อยออกไปทางซ้ายจากยานอวกาศ B มีอัตราเร็วคงตัว $0.5c$ เทียบกับยานอวกาศ B

(ก) คนบนยานอวกาศ B จะพบว่า A มีความเร็วเท่าไร

(ข) A จะพบว่าระเบิดมีความเร็วเท่าไร

(ค) A จะพบว่าระเบิดและยานอวกาศ แต่ละอย่างมีโมเมนตัมเท่าไร



(ก) คนบนยานอวกาศ B จะพบว่า A เคลื่อนที่ไป "ทางซ้าย" (ทิศลบ x) ด้วย "อัตราเร็ว V"

$$\vec{\boldsymbol{V}} = -V\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

(ข) ใช้ “inverse” velocity transformation

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{V u'_x}{c^2}} \rightarrow u_x = \frac{-0.5c + 0.8c}{1 + \frac{(0.8c)(-0.5c)}{c^2}} = \left(\frac{0.3}{0.6}\right)c = 0.5c$$

A จะเห็นระเบิดเคลื่อนที่ไป “ทางขวา” ด้วย “อัตราเร็ว $0.5c$”

(ค) Relativistic (Linear) Momentum:

$$\vec{\boldsymbol{p}} \equiv \frac{m\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \equiv \gamma m\vec{\boldsymbol{u}}$$

ทั้ง “ยานอวกาศ” และ “ระเบิด” มีการเคลื่อนที่ “เฉพาะในแนวแกนนอน” (แกน “x”)

$$(p_{\text{ยาน}})_x = \frac{M(0.8c)}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}} = \frac{0.8Mc}{\sqrt{0.36}} = \left(\frac{0.8}{0.6}\right)Mc = \left(\frac{4}{3}\right)Mc$$

$$(p_{\text{ระเบิด}})_x = \frac{m(0.5c)}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.5c}{c}\right)^2}} = \frac{0.5mc}{\sqrt{0.75}} = \frac{0.5mc}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)Mc$$

13. [F2552] ผู้สังเกตในกรอบอ้างอิง A พบว่าเกิดระเบิดขึ้นครั้งแรกที่ตำแหน่ง x_1 = 450 m และอีก 5.0 μs ต่อมาเกิดระเบิดอีกครั้งที่ตำแหน่ง x_2 = 1,350 m ผู้สังเกตอีกคนหนึ่งในกรอบอ้างอิง B ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ในทิศ $+x$ ด้วยอัตราเร็ว V พบว่าระเบิดทั้งสองครั้งนั้นเกิดขึ้นที่ตำแหน่งเดียวกัน

(ก) จงคำนวณหาค่า V ว่าเป็นกี่เท่าของอัตราเร็วแสง c (กำหนดให้ $c = 3\times 10^8$ m/s)

(ข) ตัวเลข 5.0 μs นี้เป็น Proper Time Interval หรือไม่ เพราะเหตุใด

(ค) B จะพบว่าระเบิดทั้งสองครั้งนั้นเกิดขึ้นห่างกันนานเท่าใด ในหน่วย μs

	S frame (A)	S′ frame (B)
ระเบิดครั้งที่ 1	$(x_1 = 450\text{ m}, t_1)$	(x_1', t_1')
ระเบิดครั้งที่ 2	$(x_2 = 1{,}350\text{ m}, t_2 = t_1 + 5\ \mu s)$	$(x_2' = x_1', t_2')$

(ก) จาก $\boxed{\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t)}$ จะได้ $0 = \gamma[(900\text{ m}) - V(5\ \mu s)]$

$$\rightarrow \quad V = \frac{900\text{ m}}{5\times 10^{-6}\text{ s}} = \frac{3}{5}\times 3\times 10^{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \left(\frac{3}{5}\right)c = 0.6c$$

$$V = 0.6c \;\rightarrow\; \beta = 0.6 \;\rightarrow\; \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{0.64} \;\rightarrow\; \gamma = \frac{5}{4}$$

(ข) “ไม่ใช่” proper time interval เนื่องจากเหตุการณ์ทั้งสอง “เกิดที่คนละตำแหน่ง”

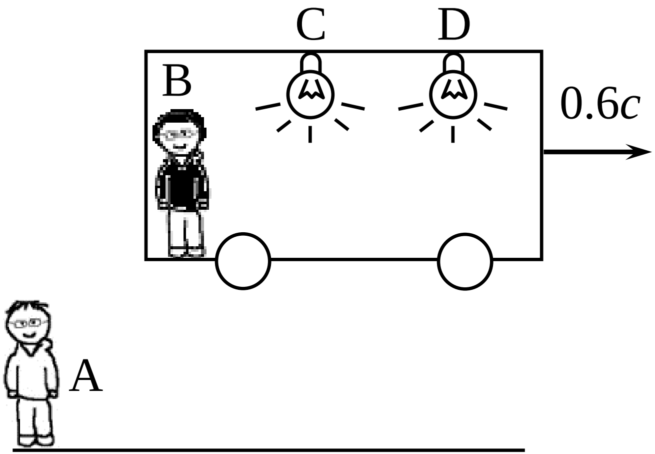
(ค) จาก

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right)$$

จะได้

$$\Delta t' = \left(\frac{5}{4}\right)\left[(5\ \mu s) - \frac{(0.6c)}{c^2}(900\text{ m})\right] = 4\ \mu s$$

14. [F2551] นาย A ยืนนิ่งอยู่บนพื้น ส่วนนาย B ยืนนิ่งอยู่บนรถซึ่งกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $0.6c$ ไปทางขวา ภายในรถมีหลอดไฟสองดวง นาย A พบว่าดวง C อยู่ห่างจากนาย B เป็นระยะทาง ℓ และดวง D อยู่ห่างจากดวง C เป็นระยะทาง ℓ และทั้งสองดวงดับอยู่ เมื่อรถเคลื่อนไปจนกระทั่งนาย A พบว่านาย B อยู่ห่างจากเขาเป็นระยะทาง d นาย A ก็พบว่าหลอดไฟในรถทั้งสองดวงสว่างขึ้นทันทีพร้อมกัน กำหนดให้ตอนเริ่มต้นนาย B ผ่านหน้านาย A พอดี



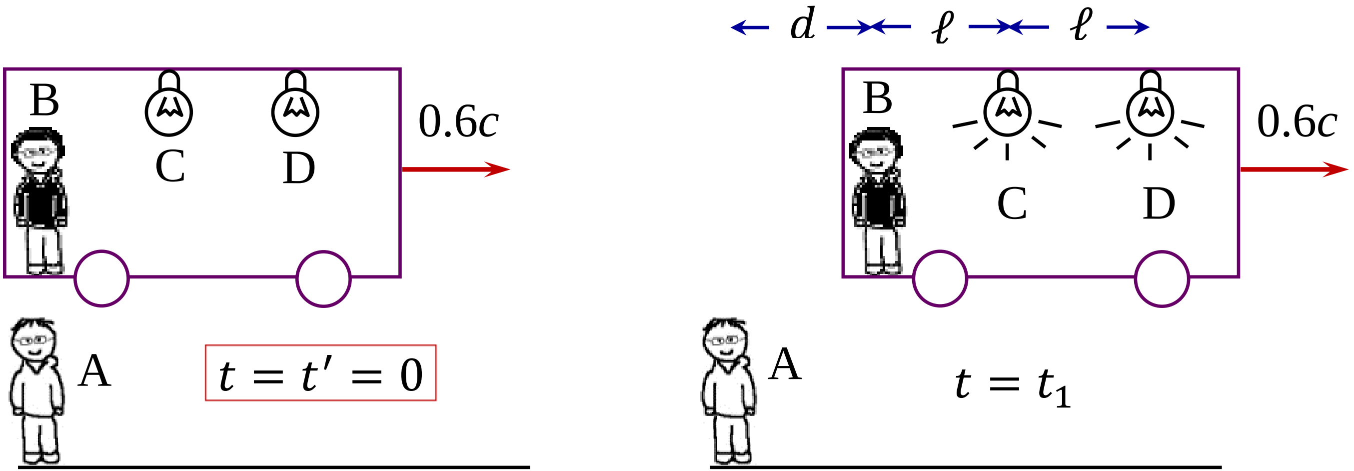
(ก) นาย A พบว่าหลอดไฟ C สว่างขึ้นที่เวลาใด

(ข) นาย A พบว่าหลอดไฟ C และ D สว่างขึ้นที่ตำแหน่งใด

(ค) นาย A วัดช่วงเวลาระหว่างการสว่างขึ้นของหลอดไฟทั้งสองดวงได้เท่าไร

(ง) นาย B พบว่าหลอดไฟ C สว่างขึ้นที่เวลาใด

(จ) นาย B พบว่าหลอดไฟหลอดใดสว่างขึ้นก่อน



ที่ $t = t_1 \rightarrow$ A เห็น (i) B อยู่ห่างออกไปเป็นระยะ d และ (ii) C และ D สว่างขึ้นพร้อมกัน

(ก) $$t_1 = \frac{d}{0.6c} = \left(\frac{10}{6}\right)\frac{d}{c} = \left(\frac{5}{3}\right)\frac{d}{c}$$

(ข) ที่ตำแหน่ง $d + \ell$ และ $d + 2\ell$ ตามลำดับ

(ค) "0" (A พบว่าหลอดไฟ C และ D สว่างขึ้น "พร้อมกัน")

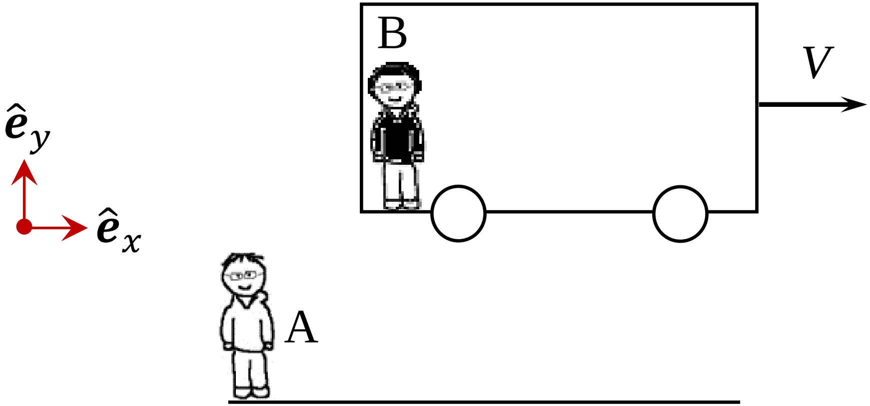
(ง) จาก $$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)$$ จะได้

$$t'_C = \left(\frac{5}{4}\right)\left[\left(\frac{5}{3}\right)\frac{d}{c} - \frac{(0.6c)(d+\ell)}{c^2}\right] = \left(\frac{4}{3}\right)\frac{d}{c} - \left(\frac{3}{4}\right)\frac{\ell}{c}$$

$$t'_D = \left(\frac{5}{4}\right)\left[\left(\frac{5}{3}\right)\frac{d}{c} - \frac{(0.6c)(d+2\ell)}{c^2}\right] = \left(\frac{4}{3}\right)\frac{d}{c} - \left(\frac{3}{2}\right)\frac{\ell}{c}$$

(จ) เนื่องจาก $t'_D < t'_C$ ดังนั้น B จะเห็น "หลอดไฟ D" สว่างขึ้น "ก่อน"

15. [F2552] นาย A ยืนนิ่งอยู่บนพื้น ส่วนนาย B ยืนนิ่งอยู่บนรถ ซึ่งนาย A พบว่ารถกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว V ในทิศ $+x$ ผ่านเขาไปตอนเริ่มต้น



(ก) ถ้า $V = 7\ \mathrm{m/s}$ และ นาย B ปาลูกบอลออกไปด้านหน้าด้วยความเร็ว $15\ \mathrm{m/s}$ (นาย B วัดเอง) นาย A จะพบว่าลูกบอลนี้มีความเร็วเท่าใด

(ข) ถ้า $V = 7\ \mathrm{m/s}$ และ นาย B ปาลูกบอลออกไปด้านหน้าด้วยความเร็ว $15\ \mathrm{m/s}$ ในทิศทำมุม 53° กับแกน x (นาย B วัดเอง) นาย A จะพบว่าลูกบอลนี้มีความเร็วเท่าใด

(ค) ถ้า $V = 0.6c$ โดยที่ c คืออัตราเร็วของแสง และ นาย B ยิงจรวดออกไปด้านหน้าด้วยความเร็ว $0.5c$ (นาย B วัดเอง) นาย A จะพบว่าจรวดนี้มีความเร็วเท่าใด

(ง) ถ้า $V = 0.6c$ โดยที่ c คืออัตราเร็วของแสง และ นาย B ยิงแสงเลเซอร์สีเขียวออกไปข้างหน้า นาย A จะพบว่าโฟตอนแสงเลเซอร์นี้มีความเร็วเท่าใด

สำหรับข้อ (ก) และ (ข) เนื่องจาก "อัตราเร็ว" ของ "รถ" ($V = 7$ m/s) และของ "ลูกบอล" ($u = 15$ m/s) น้อยกว่า "อัตราเร็ว" ของ "แสง" ($c = 3 \times 10^8$ m/s) มากๆๆ → ใช้ "Galilean Relativity" ได้

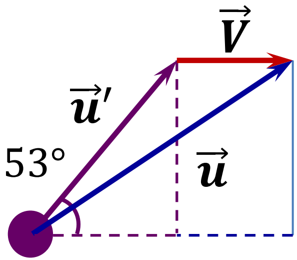
(ก) B ปา "ลูกบอล" ออกไปด้านหน้าด้วยความเร็ว 15 m/s

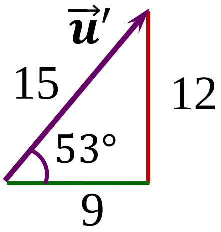
$$\vec{\boldsymbol{u}}' = (15\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{e}}_x \quad \text{และ} \quad \vec{\boldsymbol{V}} = (7\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

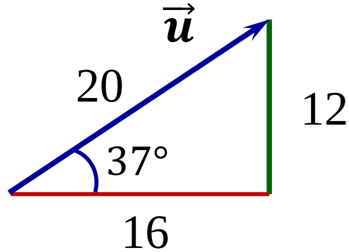
$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}' + \vec{\boldsymbol{V}} \rightarrow \vec{\boldsymbol{u}} = (22\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

→ "A" จะพบว่า "ลูกบอล" มีความเร็ว "22 m/s" ไป "ทางขวา (ด้านหน้า)"

(ข) B ปา “ลูกบอล” ออกไปด้านหน้าด้วยความเร็ว 15 m/s ในทิศ “ทำมุม 53° กับแกน x”







$$\vec{\boldsymbol{u}}' = (15\ \mathrm{m/s})cos(53°)\hat{\boldsymbol{e}}_x + (15\ \mathrm{m/s})sin(53°)\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}' = (15\ \mathrm{m/s})\left(\frac{3}{5}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_x + (15\ \mathrm{m/s})\left(\frac{4}{5}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y = (9\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{e}}_x + (12\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

$$\vec{\boldsymbol{V}} = (7\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}' + \vec{\boldsymbol{V}} = (16\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{e}}_x + (12\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

$\rightarrow$ “A” จะพบว่า “ลูกบอล” มีความเร็ว “20 m/s” ในทิศ “ทำมุม 37° กับแกน x”

สำหรับข้อ (ค) และ (ง) เนื่องจาก "อัตราเร็ว" ของ "รถ" ($V = 0.6c$) และ "อัตราเร็ว" ของ "จรวด" ($u = 0.5c$) เข้าใกล้ "อัตราเร็ว" ของ "แสง" (c) → ใช้ "Special Relativity"

(ค) B ยิง "จรวด" ออกไป "ด้านหน้า" ด้วย "ความเร็ว $0.5c$" (B วัดเอง) → $u'_x = 0.5c$

ใช้ "inverse" velocity transformation

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{V u'_x}{c^2}} \rightarrow u_x = \frac{0.5c + 0.6c}{1 + \frac{(0.6c)(0.5c)}{c^2}} = \left(\frac{1.1}{1.3}\right) c = 0.846c$$

→ "A" จะพบว่า "จรวด" มีความเร็ว "$0.846c$" ไป "ทางขวา (ด้านหน้า)"

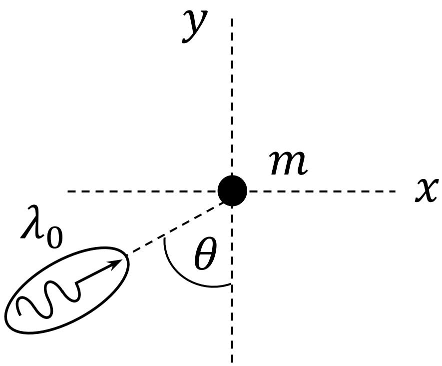
(ง) B ยิง "แสงเลเซอร์สีเขียว" ออกไป "ด้านหน้า" → $u'_x = c$

ใช้ "inverse" velocity transformation

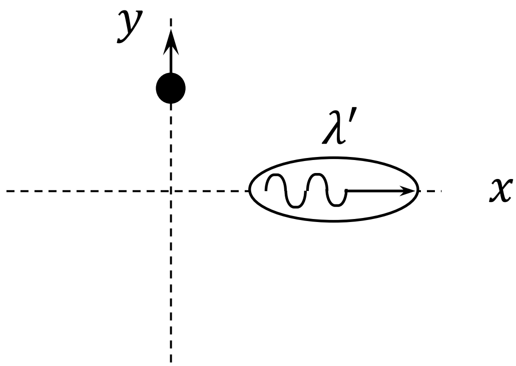
$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{V u'_x}{c^2}} \rightarrow u_x = \frac{c + 0.6c}{1 + \frac{(0.6c)(c)}{c^2}} = \left(\frac{1.6}{1.6}\right) c = c$$

→ "A" จะพบว่า "โฟตอนแสงเลเซอร์" มีความเร็ว "c" ไป "ทางขวา (ด้านหน้า)" ✓

16. [F2552] โฟตอนความยาวคลื่น λ_0 เข้าชนกับอนุภาคอิสระมวล m ซึ่งเดิมอยู่นิ่ง โดยแนวการชนทำมุม $\theta = 53^\circ$ กับแกน y ดังรูปซ้าย หลังชนโฟตอนมีความยาวคลื่น λ' และเคลื่อนที่ในแนวแกน x ส่วนอนุภาคเคลื่อนที่ไปในแนวแกน y ดังรูปขวา



ก่อนชน



หลังชน

กำหนดให้ ระบบคือโฟตอนและอนุภาค และความยาวคลื่นของโฟตอนเปลี่ยนไป

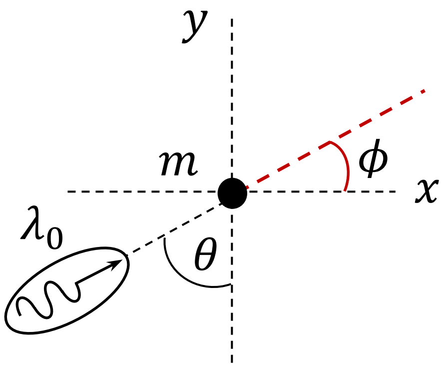
$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi)$$ เมื่อ ϕ คือ มุมกระเจิงของโฟตอน

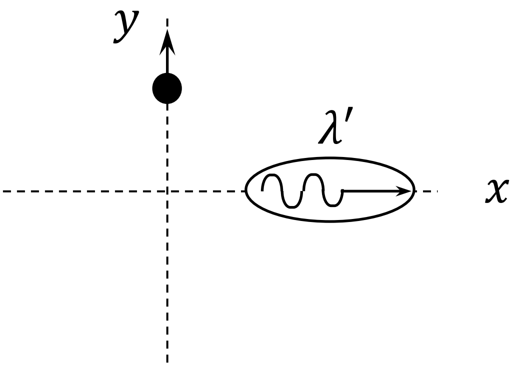
(ตอบในรูปตัวแปรในโจทย์ และค่าคงตัวที่เกี่ยวข้องเท่านั้น)

(ก) จงหาพลังงานรวม (เชิงสัมพัทธภาพ) ของระบบก่อนชน (อนุภาคอยู่นิ่ง)

$$E^B = E^B_{photon} + E^B_{particle} = hf_0 + mc^2 = \frac{hc}{\lambda_0} + mc^2$$

(ข) โฟตอนกระเจิงไปจากแนวเดิมเป็นมุมเท่าใด





$$\text{มุมกระเจิง} = \phi = 90^\circ - \theta = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$$

(ค) จงอธิบายโดยใช้หลักฟิสิกส์ว่าความยาวคลื่นภายหลังการชนของโฟตอนนั้น มากขึ้น น้อยลง หรือ เท่าเดิม เพราะเหตุใด

หลังการชน “โฟตอน” จะมี “พลังงานลดลง” (ถ่ายเท/สูญเสียพลังงานบางส่วนให้กับอนุภาค ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่)

เนื่องจาก $$E_{photon} = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

(“พลังงาน” ของ “โฟตอน” จะ “แปรผกผัน” กับ “ความยาวคลื่น”)

ดังนั้น

“ความยาวคลื่น” ภายหลังการชนของโฟตอนจะมีค่า “มากขึ้น”

(ง) จงหาความยาวคลื่นของโฟตอนหลังการชนกับอนุภาค

จาก $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi) = \lambda' - \lambda_0$ จะได้ $\lambda' = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1-\cos\phi)$

(จ) จงหาพลังงานจลน์ของอนุภาคหลังชน

พลังงานรวม (เชิงสัมพัทธภาพ) ของระบบ “ก่อนชน” (อนุภาคอยู่นิ่ง)

$$E^B = E^B_{photon} + E^B_{particle} = hf_0 + mc^2 = \frac{hc}{\lambda_0} + mc^2$$

พลังงานรวม (เชิงสัมพัทธภาพ) ของระบบ “หลังชน” (อนุภาคเคลื่อนที่)

$$E^A = E^A_{photon} + E^A_{particle} = \frac{hc}{\lambda'} + (mc^2 + K)$$

ใช้ “หลักการอนุรักษ์พลังงาน ($E^A = E^B$)” จะได้

$$K = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda'} = hc\left(\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0 \lambda'}\right)$$

(ฉ) เป็นไปได้หรือไม่ ที่ภายหลังการชนตามโจทย์ข้างบนแล้ว โฟตอนมีความยาวคลื่น λ' เคลื่อนที่ในแนวแกน $-y$ ส่วนอนุภาคเคลื่อนที่ไปทาง $+y$

"เป็นไปไม่ได้" เพราะจะขัดกับ "หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น"
(ก่อนชน "มีโมเมนตัมเชิงเส้นในแนวแกน x" ในขณะที่ หลังชน "ไม่มี")